MATEMATICA LIBERA

ECONOMIA

Testo a moduli
per la Scuola Secondaria di *II* grado

Modulo 16: Economia

Edizione - 2022

Credits: Il testo deriva da "Matematica Dolce":
https://www.matematicadolce.eu/
che a sua volta è derivato da "Matematica C3":
https://it.m.wikibooks.org/wiki/Algebra_1
https://it.m.wikibooks.org/wiki/Algebra_2
https://www.larapedia.com/geometria_razionale/geometria_razionale_nozioni_fondamentali.html

Coordinatori del Progetto: Daniele Zambelli.

Autori: Bruno Stecca, Daniele Zambelli .

Hanno Collaborato: Alberto Filippini .

Progettazione e Implementazione in LaTeX: Dimitrios Vrettos, Daniele Zambelli.

Collaboratori: .

Collaborazione, commenti e suggerimenti: Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica Dolce o se vuoi inviare i tuoi commenti e/o suggerimenti scrivi a .

Versione del documento: `0.0.0` del 4 Maggio 2022.
Stampa edizione 2022: maggio 2022.
ISBN

Dati tecnici per l'adozione del libro a scuola
Titolo: Matematica Libera, Economia -2022.
Codice ISBN:
Editore:
Anno di edizione: 2022.
Prezzo pdf:
Formato: ebook (pdf).

Indice

1 Matematica finanziaria

In questo capitolo incontrerai:

- capitalizzazione;
- trasporto di capitali nel tempo;
- serie geometrica;
- rendite;
- ammortamenti.

La matematica finanziaria è quella parte della matematica applicata che si occupa degli scambi di somme di denaro disponibili in tempi diversi.

Se presto una certa somma di denaro (**capitale**) per un certo periodo, io, durante quel periodo, non potrò usare quel denaro, e mi aspetto di essere remunerato per ciò. Specularmente, se uso del denaro che non possiedo, dovrò pagare una certa somma per il prestito ricevuto.

L'**interesse** è il compenso che spetta a colui che concede in prestito un capitale, rinunciando per un certo periodo di tempo al suo uso.

Il **tasso di interesse** viene espresso come una percentuale per un dato periodo di tempo e indica quanta parte della somma prestata (detta capitale iniziale) debba essere corrisposta come interesse al termine del tempo considerato. Il debitore, infatti, ricevendo una somma di denaro, si impegna a restituire una somma superiore a quella ricevuta.

Esempio 1.1: *Deposito in banca* 3000 € *e, un anno dopo, ne ritiro* 3150 €. *Gli interessi sono dati dalla differenza tra il capitale finale e il capitale iniziale e quindi sono* 150 €. *Il tasso di interesse è la percentuale degli interessi sul capitale iniziale e quindi*

$$i = \frac{150}{3000} = 0{,}05$$

ovvero il 5%. È importante notare che tale tasso di interesse è strettamente riferito al periodo di tempo (in questo caso un anno). Pertanto è più corretto affermare che il tasso di interesse è del 5% annuo.

Esempio 1.2: *Ho acquistato un nuovo computer di* 700 € *sfruttando un'offerta che mi permette di pagarlo tra un anno, pagando un interesse del 3%. L'interesse che dovrò pagare sarà di* $700 \cdot 0{,}03 = 21$ € *e alla fine il computer mi costerà* 721 €. *Per calcolare quanto dovrò pagare il computer alla fine quindi devo fare* $700 + 700 \cdot 0{,}03$. *Un modo più rapido per calcolarlo è quello di* *moltiplicare 700 per 1,03, infatti* $700(1+0{,}03) = 700 \cdot 1{,}03 = 721$

I tassi d'interesse sono caratterizzati dal regime di capitalizzazione degli interessi, che può essere semplice o composto. Se la durata del prestito è superiore al periodo di tempo per cui l'interesse viene conteggiato (ad esempio un tasso di interesse annuo calcolato per 4 anni), si parla di tasso di interesse composto, perché vengono conteggiati nel calcolo dell'interesse finale anche gli interessi parziali già maturati per ogni periodo.

1.1 Capitalizzazione semplice

L'interesse viene detto semplice quando è proporzionale al capitale e al tempo. Ovvero gli interessi, maturati da un dato capitale nel periodo di tempo considerato, non vengono aggiunti al capitale che li ha prodotti (capitalizzazione) e, quindi, non maturano a loro volta interessi. Indichiamo:

- **C** il capitale iniziale;
- **i** il tasso di interesse periodale (in genere tasso unitario annuo, ma può essere mensile, trimestrale...);
- **t** durata temporale dell'operazione, espressa in numero di periodi (in genere anni);
- **M** il capitale finale, detto anche montante, pari alla somma di capitale iniziale più gli interessi maturati.

All'istante iniziale ($t = 0$) possiamo dire che il montante coincide col capitale

$$M_0 = C$$

Dopo un periodo di tempo ($t = 1$), il montante sarà dato dal capitale più l'interesse.

$$M_1 = M_0 + iC = C + iC$$

Analogamente dopo 2, 3 e 4 periodi di tempo il capitale sarà dato da

$$M_2 = M_1 + iC = (C + iC) + iC = C + 2iC$$

$$M_3 = M_2 + iC = (C + 2iC) + iC = C + 3iC$$

$$M_4 = M_3 + iC = (C + 3iC) + iC = C + 4iC$$

In generale possiamo calcolare il montante per il periodo successivo con la formula:

$$M_t = M_{t-1} + iC = C(1 + t \cdot i)$$

Definizione 1.1 (Capitalizzazione semplice): *Si ha capitalizzazione semplice quando alla fine di ogni periodo l'interesse viene pagato e quindi non entra a far parte del capitale investito. In questo caso il montante al tempo t si calcola:*

$$M_t = C(1 + t \cdot i)$$

Esempio 1.3: *Una persona deposita* 5000 € *in banca al tasso di interesse annuo del 5%. Dopo 4 anni preleva la somma e la reinveste al tasso annuo del 6%. Dopo altri 5 anni e 9 mesi di che cifra dispone?*
Il capitale iniziale è di 5000 € *e applicando la formula di capitalizzazione semplice otteniamo che il montante dopo 4 anni è*

$$M_4 = 5000(1 + 4 \cdot 0{,}05) = 6000$$

Quando questa cifra viene prelevata e reinvestita possiamo considerarla come il nuovo capitale iniziale. La durata temporale, in questo caso, è espressa in anni e in mesi. Convertendola in anni otteniamo $t = 5 + \frac{9}{12} = 5{,}75$ *e quindi*

$$M_{5,75} = 6000(1 + 5{,}75 \cdot 0{,}06) = 8070$$

1.2 Capitalizzazione composta

L'interesse viene detto composto quando, invece di essere pagato o riscosso, è aggiunto al capitale iniziale che lo ha prodotto. Questo comporta che, alla maturazione degli interessi, il montante verrà riutilizzato come capitale iniziale per il periodo successivo. Quindi anche l'interesse stesso produce a sua volta interesse.

In questo caso quindi gli interessi si sommano al capitale iniziale che li ha prodotti al termine di ogni periodo. Analogamente a prima il montante iniziale coincide col capitale

$$M_0 = C$$

Dopo un periodo il montante sarà dato dal capitale più l'interesse

$$M_1 = C + iC = C(1 + i)$$

Calcoliamo adesso l'interesse su tutto il montante M_1 e troviamo

$$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1 + i) = C(1 + i)^2$$

$$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^3$$

ed in generale risulta

$$M_t = M_{t-1}(1 + i) = C(1 + i)^{t-1}(1 + i) = C(1 + i)^t$$

Definizione 1.2 (Capitalizzazione composta): *Si ha capitalizzazione composta quando alla fine di ogni periodo l'interesse entra a far parte del capitale investito. In questo caso il montante al tempo t si calcola:*

$$M_t = C(1 + i)^t$$

In generale il periodo considerato è l'anno. Spesso però vengono considerati anche gli interessi che maturano t volte durante l'anno, ma sempre in periodi definiti. In genere viene definito un tasso annuo nominale i al quale corrisponde un tasso convertibile i_c dato da $i_c = \frac{i}{t}$.

Per il calcolo del montante si applica la stessa formula impiegata per l'interesse composto $M_n = C(1+i_c)^{nt} = C\left(1+\frac{i}{t}\right)^{nt}$.

dove i_c è l'interesse convertibile e nt indica il numero di volte in cui l'interesse convertibile matura nell'intero periodo.

Esempio 1.4: *Un "amico", 20 anni fa, mi ha prestato 500 € al tasso di interesse del 9% in regime di capitalizzazione composta. Per capire quanto gli devo restituire oggi posso usare la formula per la capitalizzazione composta.*

$$M_{20} = 500\,€(1+0{,}09)^{20} = 2802{,}21\,€$$

Come si nota subito in 20 anni la cifra iniziale è più che quintuplicata. In effetti il tasso del 9 % è un tasso da usura .

Esempio 1.5: *Un capitale di 10 000 € è stato investito per un periodi di 30 mesi al tasso trimestrale convertibile dell'1% . Considerando che ci sono 4 trimestri in un anno, il tasso annuo nominale risulta quindi*

$$i = i_c \cdot t = 1 \cdot 4 = 4\%$$

Dopo 30 mesi, ovvero 10 trimestri, il montante risulta

$$M = 10000\,€(1+0{,}01)^{10} = 11046{,}22\,€$$

Scindibilità finanziaria

Si dice che un regime finanziario è **scindibile** se il montante di un'operazione finanziaria dipende solo dalla durata e non da eventuali operazioni di disinvestimento ed investimento intermedie (ossia da operazioni di capitalizzazione intermedie). La capitalizzazione semplice non è scindibile nel tempo, infatti se investo 3000 € per 5 anni con un tasso di interesse $i = 0{,}08$ ottengo

$$3000(1 + 5 \cdot 0{,}08) = 4200$$

mentre se li disinvesto dopo 2 anni e li reinvesto immediatamente per altri 3 ottengo

$$3000(1 + 2 \cdot 0{,}08) = 3480$$

e poi

$$3480(1 + 3 \cdot 0{,}08) = 4315{,}2$$

che sono cifre diverse. Lo stesso problema, con la capitalizzazione composta, risulta

$$3000(1 + cdot 0{,}08)^5 = 4408$$

se aspetto 5 anni oppure

$$3000(1 + 0{,}08)^2 = 3499$$

e poi

$$3499(1 + 0{,}08)^3 = 4408$$

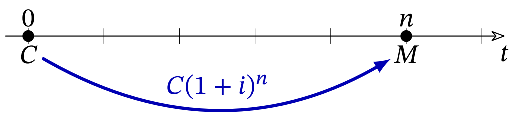
se invece disinvesto dopo 2 anni e reinvesto per 3. Come si vede in questo caso le due cifre sono uguali. Questo è un fatto più generale (dipende dalle proprietà delle potenze) e quindi la capitalizzazione composta è scindibile. Per questa importante proprietà, nel seguito, utilizzeremo sempre la capitalizzazione composta.

1.3 Trasporto di capitali nel tempo

Da quanto detto sulla capitalizzazione semplice e composta dovrebbe risultare abbastanza chiaro che non è possibile sommare, sottrarre o confrontare valori di denaro differiti nel tempo. Per prima cosa infatti è necessario riferirli allo stesso momento temporale. Abbiamo già visto che un capitale, trasportato in avanti nel tempo, diventa un montante (somma del capitale iniziale e degli interessi) e tale processo si chiama capitalizzazione. All'inverso, un capitale portato indietro nel tempo si chiama valore attuale (o valore scontato) e il processo si definisce attualizzazione (o sconto).

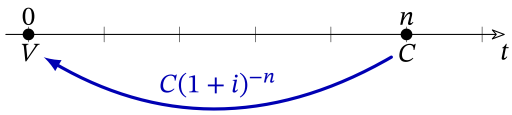
Capitalizzazione

Per trasportare avanti nel tempo un capitale in un regime di capitalizzazione composta la formula è già stata vista e risulta $M = C(1+i)^n$ dove n indica il numero di periodi (nella figura qui sotto, ad esempio, $n = 5$).



Attualizzazione

Trasportare un capitale indietro nel tempo di n periodi, prevede di calcolare qual è la cifra di partenza, detta $valore attuale$ (o sconto) per cui, dopo n intervalli, si è arrivati a quel capitale. Il valore attuale, quindi, dopo n intervalli, viene attualizzato e diventa il capitale di partenza, in formule $C = V(1+i)^n$.

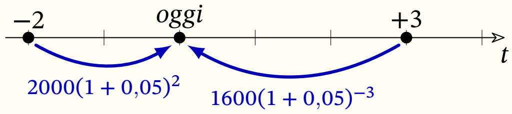


Invertendo la formula risulta $V = \dfrac{C}{(1+i)^n}$ e ricordando le proprietà delle potenze[1] risulta:

> **Definizione 1.3 (Attualizzazione):** *È la somma attuale che dopo un certo numero di periodi dà un certo capitale C, e si calcola:*
>
> $$V = C(1+i)^{-n}$$

[1] ovvero che $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$

Esempio 1.6: *Voglio sommare* 2000 € *che ho ricevuto 2 anni fa,* 1000 € *euro ricevuti oggi e* 1600 € *che riceverò tra 3 anni, utilizzando un tassodi interesse* $i = 0{,}05$. *Trasporto tutti i capitali alla data attuale.*



- 2000 € *vanno capitalizzati e quindi risulta* $M = 2000(1+0{,}05)^2 = 2205$
- 1000 € *sono già alla data attuale*
- 1600 € *vanno attualizzati e risulta* $M = 1600(1 + 0{,}05)^{-3} = 1382$

La somma totale alla data odierna è quindi $2205 + 1000 + 1382 = 4587$

È interessante notare che per frazioni dell'anno si possono usare esponenti frazionari, ad esempio se devo trasportare in avanti di 3 mesi (che sono $\frac{3}{12}$ di anno) un capitale al tasso di interesse annuo del 5% posso fare $M = C(1 + 0{,}05)^{\frac{3}{12}}$

1.4 Intermezzo matematico: la serie geometrica

Per il seguito è necessario imparare a sommare le prime n potenze di un numero fissato q, detta *ragione*. In alcuni casi posso farlo direttamente, ad esempio la somma $2^0 + 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$ ma se devo fare $3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{42}$ devo sviluppare un altro metodo. Indichiamo con S la somma delle prime n potenze di un numero generico q:

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n$$

moltiplichiamo da entrambi i lati per $q - 1$

$$S(q - 1) = (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n)(q - 1)$$

e quindi sviluppando il prodotto tra polinomio e binomio risulta

$$S(q - 1) = q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^n + q^{n+1} - 1 - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^{n-1} - q^n$$

la maggior parte dei termini si semplifica compresi i termini sottintesi dai puntini e risulta

$$S(q - 1) = \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \cancel{q^4} + \cdots + \cancel{q^n} + q^{n+1} - 1 - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \cancel{q^3} - \cdots - \cancel{q^{n-1}} - \cancel{q^n}$$

quindi

$$S(q - 1) = q^{n+1} - 1$$

e dividendo entrambi i membri per $q - 1$ otteniamo:

Definizione 1.4 (Serie geometrica):

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Esempio 1.7: *Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla sessantaquattresima casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.*
Come prima cosa sommiamo le prime 64 *potenze di due; ricordandoci di contare anche* $2^0 = 1$.

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^63 = \frac{2^{63+1} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 1{,}84 \cdot 10^{19}$$

Se 1000 chicchi di grano pesano 38 g, allora il peso totale dei chicchi sulla scacchiera vale $7.00976 \cdot 10^{17}\,\mathrm{g}$ *ossia* $7.00976 \cdot 10^{14}\,\mathrm{kg} = 7.00976 \cdot 10^{11}$ tonnellate.

1.5 Rendite

Una rendita finanziaria è una successione di importi, chiamate rate, da riscuotere (o da pagare) in epoche differenti, chiamate scadenze, ad intervalli di tempo determinati. Per semplicità considereremo nel seguito intervalli di tempo di durata costante e rate costanti (ovvero tutte uguali).

Esempio 1.8 (Nonna e nipote): *Una nonna versa alla nipote* 500 € *per ogni compleanno dalla prima candelina fino al diciottesimo. Alla maggiore età la nipote ritirerà un montante dato dalla somma delle 18 rate* (9000 €) *più gli interessi, che saranno dati dalla capitalizzazione di 17 periodi per i primi 500 euro, di 16 periodi per i 500 euro versati al secondo compleanno e così via fino ai 500 euro versati al diciottesimo su cui non saranno maturati interessi.*

Esistono diversi tipi di rendite, che possono essere caratterizzate da diversi fattori:

- La **rata**, cioè l'importo da pagare ad ogni periodo, che può essere costante o variabile nel tempo. Per semplicità, nel seguito, ci occuperemo solo di *rate costanti*. Indicheremo la rata con R.
- Il **numero** di rate da pagare che considereremo sempre finito e indicheremo con n. Esistono però anche rendite (dette perpetue o vitalizie) in cui n non è finito o non è determinato fin dall'inizio.
- Il **periodo** ovvero l'intervallo di tempo che c'è tra una rata e l'altra. Generalmente tale intervallo sarà annuale, ma potrebbe essere anche mensile, trimestrale o altro. Il tasso di interesse i deve essere riferito al periodo.
- La **decorrenza** che indica da quando può essere pagata (o riscossa) la prima rata. Noi ci occuperemo solo di rendite *immediate*, ovvero quelle in cui si inizia a pagare nel primo periodo, ma esistono anche le rendite differite, in cui si paga o riscuote la prima rata dopo un certo numero di periodi (un esempio è la pensione).

- La **scadenza** della rata ovvero se si paga all'inizio del periodo (*rendita anticipata*) o alla fine del periodo (*rendita posticipata*). Ad esempio una rendita annuale è anticipata se pago le rate al 1 gennaio e posticipata se le pago il 31 dicembre.

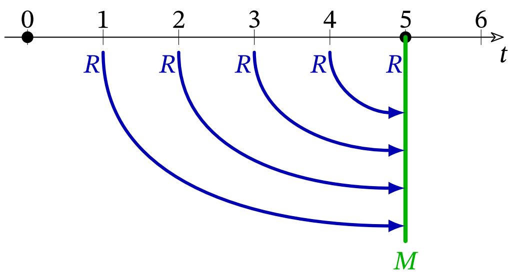
Per capire il meccanismo matematico che c'è dietro alle rendite analizzeremo soltanto alcune rendite particolari ovvero le rendite immediate con il numero delle rate totali finito e le scadenze separate da intervalli di tempo uguale. Studieremo queste rendite nel caso in cui siano anticipate o posticipate.

Rendite immediate posticipate a rate costanti

Nelle rendite immediate posticipate a rate costanti abbiamo Rendite posticipate

- La **rata** R che è costante e pagata alla fine di ogni periodo.
- Il **numero** di periodi n fissato (e la durata dei periodi costante)
- Il **tasso di interesse** i riferito alla durata del periodo.

Vediamo adesso come possiamo calcolare il **montante** M. Si tratta di capitalizzare (ovvero trasportare avanti nel tempo) ogni singola rata.



Nella figura abbiamo $n = 5$ anche se la prima rata viene pagata alla fine del primo periodo; dovrà quindi essere trasportata in avanti di 4 periodi, in formule $M = R(1+i)^4$. Per lo stesso motivo, la seconda rata dovrà essere portata in avanti di 3 periodi ovvero $M = R(1 + i)^3$. La penultima rata deve essere portata avanti solo di un periodo, quindi $M = R(1 + i)^1$ mentre l'ultima rata è già alla data in cui viene calcolato il montante, quindi R. Il montante sarà quindi dato dalla somma di tutte le rate capitalizzate ovvero:

$$M = R + R(1 + i) + R(1 + i)^2 + R(1 + i)^3 + R(1 + i)^4$$

nel caso di un numero di rate generico n tale formula diventa

$$M = R + R(1 + i) + R(1 + i)^2 + \cdots + R(1 + i)^{n-1}$$

e, raccogliendo R, risulta

$$M = R\big(1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^{n-1}\big)$$

che è una serie geometria di ragione $(1 + i)$ e quindi

$$M = R\frac{(1 + i)^{(n-1+1)} - 1}{1 + i - 1}$$

che semplificando risulta

Definizione 1.5 (Montante di rendita posticipata):

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Per trovare il valore attuale di questo montante basta attualizzarlo di n periodi ovvero:

$$V = M(1+i)^{-n}$$

che sostituendo con il valore del montante per una rendita posticipata risulta:

$$V = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n}$$

e applicando le proprietà delle potenze risulta:

Definizione 1.6 (Valore attuale di rendita posticipata):

$$V = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Esempio 1.9: *Rivediamo l'esempio 1.8 (nonna e nipote). Abbiamo* $R = 500$ *ed* $n = 18$*. Supponiamo un tasso d'interesse* $i = 0{,}02$*, possiamo calcolare il montante*

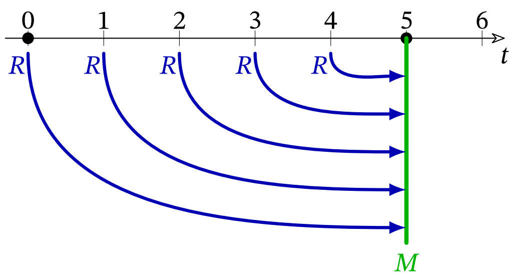
$$M = 500\frac{(1+0{,}02)^{18} - 1}{0{,}02} = 10\,706{,}16$$

ed il valore attuale

$$V = 500\frac{1-(1+0{,}02)^{-18}}{0{,}02} = 7\,496{,}02$$

Rendite immediate anticipate a rate costanti

Nel caso della rendita anticipata la rata viene pagata all'inizio del periodo. Senza dover ripetere il procedimento della serie geometrica posso immaginare una rendita anticipata come una rendita posticipata in cui ogni rata non vale R ma $R(1+i)$. Infatti la differenza tra le due sta nel fatto che ogni rata viene trasportata avanti di un periodo, maturando un'interesse di i.



Montante e valore attuale di una rendita anticipata risultano quindi:

Definizione 1.7 (Montante di rendita anticipata):

$$M = R(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Definizione 1.8 (Valore attuale di rendita anticipata):

$$V = R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

1.6 Ammortamenti

In finanza, per ammortamento si intende il processo con il quale il debitore restituisce il capitale preso a prestito e gli interessi maturati sul debito.

Il capitale mutuato S viene diviso in quote di capitale a cui vengono aggiunti gli interessi, la somma dà la rata di ammortamento da corrispondere in epoche solitamente equintervallate.

Le rate di ammortamento comprendono una quota di capitale e una di interessi:

$$R = Q + I$$

Esistono diversi tipi di ammortamenti (a capitale costante, a rate costanti, a due tassi); per il seguito ci occuperemo di quello a **rate costanti** detto ammortamento alla francese .

L'ammortamento francese prevede che le rate siano posticipate e che la somma ricevuta dal debitore all'inizio sia il valore attuale di una rendita a rate costanti. Ciascuna rata è comprensiva di parte del capitale (quota capitale) ed i relativi interessi (quota interessi) calcolati sul capitale residuo non ancora restituito (debito residuo).

Per calcolare il valore della rata, noto capitale iniziale, numero di periodi e tasso d'interesse, basta applicare la formula inversa al valore attuale di una rendita posticipata:

Definizione 1.9 (Rata):

$$R = C\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Esempio 1.10: *Ho chiesto un prestito di* 20 000 *euro che voglio restituire in* 10 *anni. Se il tasso di interesse annuo è del* 3,5%*, quanto dovrò pagare ad ogni rata?*
Utilizzando la formula risulta:

$$R = 20\,000\frac{0{,}035}{1-(1{,}035)^{-10}} = 2\,404{,}83$$

Quindi devo pagare 10 rate annue da circa 2405 €.

Come detto in precedenza ogni rata è composta da una quota di capitale e una quota di interessi. Visto che il debito residuo diminuisce ad ogni periodo la quota di interessi diminuirà sempre, e di conseguenza, essendo le rate costanti, aumenterà la quota di capitale.

Piano di ammortamento

Vediamo adesso come stendere un piano di ammortamento (alla francese), ovvero un programma di estinzione del debito. Per prima cosa si calcola il valore della rata, che sarà costante. Poi si costruisce una tabella con una riga per ogni periodo (più una riga per il momento iniziale o periodo 0) e 6 colonne che saranno:

- il periodo di riferimento;
- **R**: il valore della rata (che nel nostro caso sarà costante);
- **Q**: la quota di capitale della rata;
- **I**: la quota di interesse della rata;
- **D**: il debito residuo;
- **E**: il debito estinto.

Per ogni periodo k la somma tra capitale e interesse deve corrispondere con il valore della rata, in formule:

$$R = Q_k + I_k$$

Inoltre la somma tra debito estinto e residuo in ogni periodo k dovrà equivalere al capitale iniziale.

$$C = D_k + E_k$$

Il principio con cui si costruisce il piano di ammortamento alla francese è che la quota di interesse per ogni periodo è calcolata sul debito residuo al periodo precedente. In formule:

$$I_{k+1} = i \cdot D_k$$

Vediamo con un esempio come fare operativamente.

Esempio 1.11: *Stendere un piano di ammortamento per un prestito di* 5 000 *euro da restituire in* 4 *anni ad un tasso di interesse annuo del* 10%.

Per prima cosa calcoliamo il valore della rata

$$R = 5\,000 \frac{0{,}1}{1-(1{,}1)^{-4}} = 1\,577{,}35$$

Iniziamo a stendere la tabella con quello che conosciamo al momento iniziale. I valori delle rate sono sempre costantemente uguali a 1 577,35 (tranne che nel periodo 0 perché è posticipata), il debito residuo coincide col capitale iniziale ed il debito estinto è zero.

periodo	rata	q. capitale	q. interesse	debito residuo	debito estinto
	R	Q	I	D	E
0				5000	0
1	1 577,35				
2	1 577,35				
3	1 577,35				
4	1 577,35				

La prima rata è formata da una quota di capitale ed una di interesse. La quota di interesse è calcolata sul debito residuo quindi $I_1 = i \cdot D_0 = 0{,}1 \cdot 5000 = 500$. La quota capitale si calcola ricordando che la somma tra quota capitale e interesse è la rata: $Q_1 = R - I_1 = 1577{,}35 - 500 = 1077{,}35$. A questo punto ho rimborsato una parte del capitale, e quindi il debito residuo sarà dato dal debito al periodo precedente meno la quota di capitale pagata ovvero $D_1 = D_0 - Q_1 = 5000 - 1077{,}35 = 3922{,}65$. Per calcolare la parte di debito estinto basta ricordare che $C = D_k + E_k$ e quindi $E_1 = C - D_1 = 5000 - 3922{,}65 = 1577{,}35$. Inserendo i dati in tabella risulta:

periodo	rata	q. capitale	q. interesse	debito residuo	debito estinto
	R	Q	I	D	E
0				5000	0
1	1 577,35	1 077,35	500	3 922,65	1 577,35
2	1 577,35				
3	1 577,35				
4	1 577,35				

Adesso per calcolare la quota di interesse nella seconda rata si utilizzerà il debito residuo del primo periodo ovvero 3 922,65 e si ripeteranno gli stessi calcoli. Alla fine il piano di ammortamento completo deve risultare:

periodo	rata	q. capitale	q. interesse	debito residuo	debito estinto
	R	Q	I	D	E
0				5000	0
1	1 577,35	1 077,35	500	3 922,65	1 577,35
2	1 577,35	1 185,09	392,26	2 737,56	2 262,44
3	1 577,35	1 303,60	273,76	1 433,96	3 566,04
4	1 577,35	1 433,96	143,40	0	5 000,00

Come si può vedere la parte di interessi scende ad ogni rata ed aumenta la quota di capitale. Alla fine il debito residuo deve essere 0 e il debito estinto coincidere col capitale iniziale.

1.7 Esercizi

Esercizi dei singoli paragrafi

Capitalizzazione semplice

1.1. *Calcola il valore incognito in un regime di capitalizzazione semplice*

a) $C = 2000$ €; $i = 0.02$; $t = 10$ *anni;* $M = ?$ *[2400 €]*

b) $C = 5000$ €; $t = 5$ *anni* ; $M = 5750$ €; $i = ?$ *[3%]*

c) $M = 2530$ €; $i = 0.005$; $t = 20$ *anni;* $C = ?$ *[2300 €]*

d) $C = 60000$ €; $t = 6$ *anni* ; $M = 63600$ €; $i = ?$ *[1%]*

e) $C = 3000$ €; $i = 0{,}02$; $t = 3$ *mesi;* $M = ?$ *[3015 €]*

1.2. *Risolvi i seguenti problemi:*

a) Ho investito 15000 € in regime di capitalizzazione semplice per 3 anni a un tasso d'interesse del 5% annuo. Quale interesse ho maturato? [2250 €]

b) Cinque anni fa ho investito un certo capitale in regime di capitalizzazione composta al 3% annuo. Oggi ho ritirato 12995 €. Quanti soldi avevo investito?[11300 €]

c) Vengono investiti, in regime di capitalizzazione composta, 50000 € per 10 anni. Per ottenere un interesse di 1000 euro, a quale tasso d'interesse si deve investire tale somma? [0,02 %]

Capitalizzazione composta

1.3. *Calcola il valore incognito in un regime di capitalizzazione composta*

a) $C = 2000$ €; $i = 0.02$; $t = 10$ *anni;* $M = ?$

b) $C = 5000$ €; $t = 5$ *anni* ; $M = 5750$ €; $i = ?$

c) $M = 2530$ €; $i = 0.005$; $t = 20$ *anni;* $C = ?$

d) $C = 60000$ €; $t = 6$ *anni* ; $M = 63600$ €; $i = ?$

e) $C = 3000$ €; $i = 0{,}02$; $t = 3$ *mesi;* $M = ?$

1.4. *Risolvi i seguenti problemi:*

a) Ho investito 15000 € in regime di capitalizzazione composta per 3 anni a un tasso d'interesse del 5% annuo. Quale interesse ho maturato?

b) Cinque anni fa ho investito un certo capitale in regime di capitalizzazione semplice al 3% annuo. Oggi ho ritirato 12995 €. Quanti soldi avevo investito?[11300 €]

c) Vengono investiti, in regime di capitalizzazione semplice, 50000 € per 10 anni. Per ottenere un interesse di 1000 euro, a quale tasso d'interesse si deve investire tale somma? [0,02 %]

Trasporto di capitali nel tempo

1.5. *A seguito di alcuni investimenti dovrei riscuotere 7000 € tra 3 mesi, 10 000 € tra 6 mesi e 8500 € tra un anno. Quanto posso riscuotere tra 5 mesi, al tasso annuo del 2,5%, [25 386,75]*

1.6. *Acquisto oggi un'automobile e posso pagarla così. Oggi verso 9500 €, tra 6 mesi verso 6000 € e tra 12 mesi verso 15700 €. Quanto vale l'automobile se viene applicato un tasso del 4% annuo.*

Rendite

1.7. *Una persona vuole costituire una somma che gli consenta, fra 4 anni, di poter cambiare l'auto; per questo versa E 1350 ogni quadrimestre a partire da oggi, ad un tasso annuo nominale convertibile quadrimestralmente del 6%. Quale somma avrà a disposizione all'epoca stabilita?* *[18468,45]*

1.8. *Hai versato in banca E 8000 alla fine di ogni anno e per 6 anni, al tasso annuo del 2,5%. Se decidi di ritirare il capitale all'atto dell'ultimo versamento, di quale somma potrai disporre?* *[51101,89]*

1.9. *Fra 5 anni avremo bisogno di una somma 5200 € per restituire un prestito che ci è stato fatto. Decidiamo allora di depositare ogni anno, alla fine dell'anno, una somma che sia in grado di costituire questo capitale. Qual eÁ il valore di questa somma al tasso annuo del 4%?*

1.10. *Una persona ha iniziato a versare 15 anni fa presso una banca 800 € all'anno ed ha proseguito i versamenti fino ad oggi; 4 anni fa, inoltre, ha depositato presso la stessa banca 9800 €. Per tutta la durata dell'operazione, la banca ha mantenuto costante il tasso d'interesse al 2,5% annuo. Se oggi questa persona preleva 23000 € qual è il saldo del suo conto?*

1.11. *Riccardo sa che fra 6 anni avrà bisogno di 10000€ per festeggiare con un viaggio i suoi 25 anni di matrimonio. Calcola la rata annua anticipata al tasso del 4,6% annuo che Riccardo deve versare per poter costituire questo capitale.*

1.12. *Un appartamento viene affittato per un anno ad un canone mensile di 2 000 €. Volendo pagare anticipatamente l'intero ammontare del canone, quanto si deve versare al proprietario se la valutazione viene fatta al 2%*

Ammortamenti

1.13. *Determina la rata di un mutuo per un capitale di* 150 000*, durata di* 20 *anni e un tasso di interesse annuo del* 4%

1.14. *Determina la rata di un prestito per un capitale di* 4 000*, durata di* 5 *anni e un tasso di interesse annuo del* 9%

1.15. *Determina la rata di un prestito per un capitale di* 80 000*, durata di* 15 *anni e un tasso di interesse annuo del* 1,5%

1.16. *Per un mutuo per* 60 000 *euro mi hanno proposto due opzioni: nella prima pago una rata di 530 € per 10 anni, nella seconda 380 € per 15 anni. Calcola i due tassi di interesse applicati.*

1.17. *Stendi un piano di ammortamento per un prestito di* 3 500*, durata di* 3 *anni e un tasso di interesse annuo del* 2%

1.18. *Stendi un piano di ammortamento per un prestito di* 42 000*, durata di* 6 *anni e un tasso di interesse annuo del 3%. Se decido di rimborsare tutto il capitale dopo 3 anni, quanto devo versare alla banca?*

Modelli Economici 2

In questo capitolo incontrerai:

- economia e sistema economico;
- micro economia;
- modelli domanda-offerta;
- prezzo di equilibrio.

2.1 Economia

[1]Per "economia" – dal greco (*oikos*), "casa" inteso anche come "beni di famiglia", e (*nomos*), "norma" o "legge" – si intende sia l'organizzazione dell'uso di risorse scarse (limitate o finite) quando attuata al fine di soddisfare al meglio bisogni individuali o collettivi, sia un sistema di interazioni che garantisce un tale tipo di organizzazione, sistema detto anche *sistema economico*[2].

Per l'economista e politico francese Raymond Barre [3]:

> L'economia è la scienza della gestione delle risorse scarse. Essa prende in esame le forme assunte dal comportamento umano nella gestione di tali risorse; analizza e spiega le modalità secondo le quali un individuo o una società destinano mezzi limitati alla soddisfazione di esigenze molteplici ed illimitate.

Per l'economista inglese: [4]

> L'economia è uno studio del genere umano negli affari ordinari della vita.

I soggetti che creano tali sistemi di organizzazione possono essere persone, organizzazioni o istituzioni. Normalmente si considerano i soggetti (detti anche "agenti" o "attori" o "operatori" economici) come attivi nell'ambito di un dato territorio; peraltro si tiene conto anche delle interazioni con altri soggetti attivi fuori dal territorio.

---

[1]La parte più discorsiva di questo capitolo è tratta da wikipedia:
`it.wikipedia.org/wiki/Economia` e `it.wikipedia.org/wiki/Microeconomia`
a cui si rimanda per la bibliografia e per i collegamenti di approfondimento.

[2]Lionel Robbins, *Essay on the Nature and Significance of Economic Science*, Macmillan, London, 1945
`http://mises.org/books/robbinsessay2.pdf`

[3]Raymond Barre, *Economie politique*, Presses universitaires de France, 1959

[4]Alfred Marshall, *Principi di Economia*, 1890

2.2 Il sistema economico

Il sistema economico, secondo la visione dell'economia di mercato della moderna società occidentale, è la rete di interdipendenze ed interconnessioni tra operatori o soggetti economici che svolgono le attività di produzione, consumo, scambio, lavoro, risparmio e investimento per soddisfare i bisogni individuali e realizzare il massimo profitto, ottimizzando l'uso delle risorse, evitando sprechi e aumentando la produttività individuale anche diminuendo il costo del lavoro.

Componenti o sottosistemi

I componenti o sottosistemi del sistema economico sono:

Sistema di produzione : attraverso la produzione promuove e determina l'offerta di beni e servizi sotto continua spinta all'investimento per produrre innovazione (aziende e imprese).

Sistema dei consumatori : promuove e determina attraverso il consumo la domanda e offerta di beni e servizi (es. famiglie e in parte anche imprese).

Sistema creditizio-finanziario : da esso i precedenti sottosistemi afferiscono fondi di liquidità (capitali) e strumenti finanziari per promuovere e raggiungere i loro obiettivi (produzione e/o consumo) (banche e istituti di intermediazione finanziaria).

Mercato : è l'ambiente di interazione dei precedenti sottosistemi dove avviene lo scambio di beni, servizi e denaro tipicamente regolati dalla legge della domanda e dell'offerta.

Stato : alimenta il sistema economico attraverso la spesa pubblica (offerta di servizi pubblici a fronte di prelievo fiscale), regolandolo anche attraverso interventi mirati di politica economica (politica di bilancio e politica monetaria).

Il livello di sviluppo ed efficienza di tali sottosistemi e del relativo sistema economico riflette il livello di sviluppo della società stessa e varia in funzione delle epoche storiche o della parte del mondo o Stato considerato. Storicamente si passa da economie prettamente agricole ad economie agricole-industriali fino ad arrivare a economie agricole-industriali-terziarie, mentre attualmente e geograficamente si classifica l'efficienza dei sistemi economici con le denominazioni di primo mondo, secondo mondo, terzo mondo e quarto mondo. Il processo di globalizzazione sta gradualmente portando ad una progressiva omogeneizzazione dei vari sistemi economici mondiali grazie all'interdipendenza a livello internazionale dei vari mercati nazionali (internazionalizzazione).

Operatori economici e loro funzioni

Il sistema economico può definirsi, altresì, come l'ambiente o l'insieme delle attività promosse dagli operatori economici per le suddette finalità. Gli operatori economici svolgono una o più delle seguenti funzioni:

- produzione di beni e servizi;
- consumo di beni e servizi;
- intermediazione finanziaria;
- accumulazione di ricchezza;
- redistribuzione del reddito e della ricchezza;
- assicurazione.

Settori economici

Le diverse attività di produzione di beni e servizi vengono ripartite nei settori economici:

settore primario, che comprende l'agricoltura, la selvicoltura, la pesca, lo sfruttamento delle cave e delle miniere;

settore secondario, che comprende l'industria in senso stretto, l'edilizia e l'artigianato;

settore terziario, che produce e fornisce servizi.

Vengono attualmente utilizzate, tuttavia, classificazioni più articolate.

2.3 Studio dei sistemi economici

L'Economia politica studia i sistemi economici per individuarne le leggi di funzionamento. L'economia politica in senso moderno nasce quando si afferma la separazione tra etica e politica e ci si pone espressamente il problema della potenza economica degli Stati. Per lungo tempo tale disciplina si è occupata prevalentemente di sistemi economici nazionali; i suoi concetti e metodi si sono tuttavia progressivamente estesi allo studio sia di sistemi sociali di ogni genere (economia aziendale), sia di singoli settori economici (economia agraria, economia industriale ecc.).

La Statistica economica ha invece come obiettivo la misurazione degli aspetti quantitativi di un'economia, dalla misura di grandezze semplici e di loro aggregati, all'analisi della dinamica e alle previsioni economiche, alla stima e alla verifica di modelli di comportamenti economici. Ad esempio, lo stato di un'economia nazionale viene rilevato mediante la contabilità economica nazionale (in Europa si usa il sistema di conti detto Sec95).

La Storia economica tenta di ricostruire il funzionamento di sistemi economici del passato, avvalendosi sia dei concetti dell'economia politica che dei metodi della statistica economica.

A partire dalla conoscenza o analisi del sistema economico è possibile agire sul sistema economico stesso con misure o interventi di politica economica mirati a stimolarne la stabilità o la crescita economica.

La Filosofia dell'economia è una branca della filosofia che studia le questioni relative all'economia o, in alternativa, il settore dell'economia che si occupa delle proprie fondamenta e del proprio *status* di scienza umana.

2.4 Microeconomia

La *microeconomia* è quella branca della teoria economica che studia il comportamento dei singoli agenti economici, o sistemi con un numero limitato di agenti, che operano in condizioni di*scarsità di risorse*. Assieme alla *macroeconomia*, che studia sistemi a livello aggregato, costituisce la macro-categoria in cui si possono raggruppare tutte le discipline legate all'economia politica.

Differenze con la macroeconomia

La macroeconomia si occupa delle grandezze economiche cosiddette "aggregate", come, per esempio, il livello e il tasso di crescita del prodotto nazionale, i tassi di interesse, la disoccupazione e l'inflazione, le quali dipendono in qualche modo dalla "somma" delle grandezze microeconomiche ovvero dai comportamenti microeconomici globali dei consumatori. La filosofia di fondo è dunque quella del riduzionismo classico: il sistema economico globale è descritto a partire dalla somma delle azioni o comportamenti dei singoli consumatori.

Il confine tra la microeconomia e la macroeconomia è diventato negli ultimi anni sempre meno netto. Il motivo principale è dovuto al fatto che anche la macroeconomia ha a che fare con l'analisi dei mercati. Per capire come funzionano, infatti, è necessario comprendere prima di tutto il comportamento dei singoli operatori che costituiscono questi mercati. Quindi i macroeconomisti sono diventati sempre più attenti ai fondamenti microeconomici dei fenomeni economici aggregati.

L'uso e i limiti della teoria microeconomica

Come ogni scienza, l'economia si occupa della *spiegazione* e della *previsione* dei fenomeni osservati. La spiegazione e la previsione sono fondate su *teorie*, le quali servono a spiegare i fenomeni osservati, in termini di un insieme di regole e di ipotesi di base.

Nessuna teoria è perfettamente corretta. Ognuna parte da assunzioni di base o da approssimazioni più o meno ragionevoli o realistiche della realtà. L'utilità e la validità di una teoria dipendono dalla capacità che essa ha di spiegare e prevedere l'insieme dei fenomeni reali che si vogliono studiare. Dato questo obiettivo, le teorie sono continuamente messe a confronto (testate) con le osservazioni della realtà; in seguito a questo confronto, esse sono spesso soggette a modifica e riformulazione, e a volte anche al rigetto. Il processo di verifica e riformulazione è di primaria importanza per lo sviluppo dell'economia come scienza. Per valutare una teoria, è importante tenere presente che essa è necessariamente imperfetta.

Analisi positiva e analisi normativa

Le teorie nascono per spiegare i fenomeni, vengono confrontate con l'osservazione e sono utilizzate per costruire modelli su cui basare le previsioni. L'uso della teoria economica per formulare previsioni è importante sia per i manager delle imprese sia per le politiche economiche pubbliche.

La microeconomia dà risposta a diversi interrogativi siano essi di natura *positiva* o di natura *normativa*. Gli interrogativi di natura ”positiva“ hanno a che fare con la spiegazione e la previsione, mentre le questioni di natura ”normativa“ riguardano ciò che dovrebbe essere.

A volte si vuole andare oltre la spiegazione e la previsione per porsi domande del tipo: «Che cosa sarebbe meglio fare?». È questo il campo dell'analisi *normativa*, anch'essa importante sia per i manager d'impresa sia per coloro che devono prendere decisioni di politica economica. L'analisi normativa non si occupa soltanto delle diverse opzioni di politica economica, ma riguarda anche l'implementazione delle politiche prescelte. Questa analisi è spesso accompagnata da giudizi di valore. Ogni volta che sono necessari giudizi di valore, la microeconomia non è in grado di dirci quale sia la soluzione migliore, ma può chiarire le varie scelte alternative e aiutare quindi a individuare i problemi e a prendere delle decisioni.

2.5 Modelli domanda e offerta

Di seguito riportiamo alcuni modelli semplificati per analizzare la relazione tra domanda e offerta.

Domanda

In microeconomia per *domanda* s'intende la quantità di consumo richiesta dal mercato e dai consumatori di un certo bene o servizio, dato un determinato prezzo. In ottica macroeconomica, per la scuola neoclassica l'insieme delle domande dei singoli consumatori costituisce la domanda collettiva o "domanda aggregata".

Ci sono diversi fattori che influenzano la domanda:

1. Il prezzo del bene acquistato;
2. Il prezzo dei beni complementari e succedanei;
3. Il reddito del consumatore;
4. Le aspettative soggettive dei consumatori;
5. Il costo del denaro;
6. L'elasticità o la rigidità della domanda;
7. I bisogni del consumatore.

In questo modello semplificato considereremo solo la dipendenza dal prezzo:

$$domanda = d(p)$$

Alcune caratteristiche:

1. il prezzo è sempre maggiore di zero, chi produce lo fa per guadagnare;
2. la domanda non è negativa non si può vendere al produttore;
3. la domanda diminuisce all'aumentare del prezzo.

$$\begin{cases} p > 0 \\ d \geqslant 0 \\ d(p_2) < d(p_1) \quad \text{se} \quad p_2 > p_1 \end{cases}$$

Per i punti 1. e 2. il modello sarà rappresentato nel primo quadrante del piano cartesiano.

Possiamo avere diversi modelli, matematicamente semplici, che rispettano queste caratteristiche; In tutti questi modelli:

Intersezione con l'asse d $(p = 0)$ Quando $p = 0$ si ha il massimo di beni che possono essere venduti, $d(0)$ indica il mercato potenziale MP.

Inclinazione del grafico $d'(p)$ Maggiore è il valore assoluto dell'inclinazione (che è negativa), più rapidamente diminuisce la domanda all'aumentare del prezzo.

Intersezione con l'asse p $(d = 0)$ Il prezzo che provoca una domanda uguale a zero può essere considerato il prezzo massimo a cui un bene può essere prodotto.

Domanda: modello lineare

La domanda potrebbe avere una relazione lineare con il prezzo:

$$d = -ap + b \qquad \text{con} \quad a \geqslant 0 \;\; \text{e} \;\; b > 0$$

Il coefficiente della variabile p è un numero negativo, la retta è, perciò, decrescente. Ma non possiamo parlare di coefficiente angolare, perché le grandezze d e p non sono confrontabili: una è la domanda, cioè il numero di beni o servizi richiesti e l'altro è il prezzo, cioè il costo di un bene o un servizio.

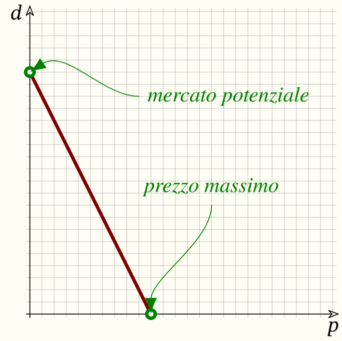
Esempio 2.1: $d = -3p + 20$
Possiamo individuare:

➡ *Il mercato potenziale:*

$$mp = d(0) = b = 20$$

➡ *Il prezzo massimo si ottiene cercando l'intersezione del grafico con l'asse dei prezzi:*

$$\begin{cases} d = 0 \\ -30p + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{20}{30} \approx 0{,}67$$



Domanda: modello quadratico

In generale quando il prezzo è alto la domanda è bassa e la domanda continua ad aumentare man mano che il prezzo diminuisce, ma quando il prezzo si avvicina a zero normalmente la domanda si stabilizza attorno a un certo valore.

Il modello quadratico rappresenta questa situazione:

$$d = -ap^2 + b \qquad \text{con} \quad a \geqslant 0 \quad \text{e} \quad b > 0$$

Il coefficiente della variabile p^2 è un numero negativo, la parabola ha la concavità rivolta verso il basso. Il massimo della parabola, mercato potenziale, si ha quando il prezzo è uguale a zero.

Esempio 2.2: $d = -0{,}5p + 22$
Possiamo individuare:

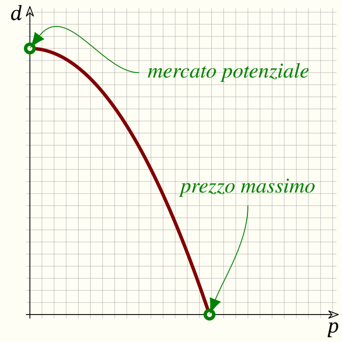
➡ *Il mercato potenziale:*

$$mp = d(0) = b = 22$$

➡ *Il prezzo massimo si ottiene cercando l'intersezione del grafico con l'asse dei prezzi:*

$$\begin{cases} d = 0 \\ -0{,}5p^2 + 22 = 0 \end{cases}$$

$$p = \mp\sqrt{\frac{22}{0{,}5}} \approx 6{,}63$$



Domanda: modello esponenziale

Alcuni beni sono necessari, ad esempio l'acqua o il cibo: per quanto aumenti il prezzo, la domanda non si ridurrà mai a zero. Il modello esponenziale rappresenta questa situazione:

$$d = ae^{-bp} \qquad \text{con} \quad a \geqslant 0 \quad \text{e} \quad b > 0$$

L'esponente negativo, quindi la funzione è decrescente. Il massimo si ha quando $p = 0$: $d(0) = ae^{-b\cdot 0} = ae^0 = a$ e quindi l'intersezione con l'asse della domanda è uguale a a.

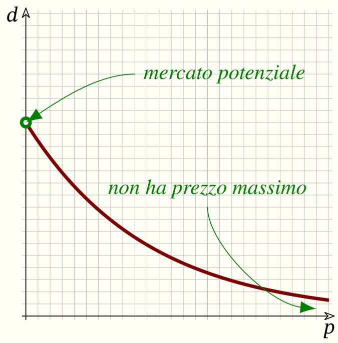
Esempio 2.3: $d = 18e^{-7p}$

Possiamo individuare:

➡ *Il mercato potenziale:*

$$mp = d(0) = 18e^{-b\cdot 0} = 18e^0 = 18$$

➡ *Poiché la funzione esponenziale non interseca l'asse delle ascisse, la funzione non ha prezzo massimo.*



Domanda: modello iperbolico

Altre situazioni si presentano con alcune caratteristiche del modello lineare e alcune del modello esponenziale. Esiste un prezzo massimo, ma la curva presenta una concavità verso l'alto:

$$d = \frac{a}{p+b} - c \qquad \text{con} \quad a \geqslant 0 \quad \text{e} \quad b > 0 \quad \text{e} \quad c \geqslant 0$$

Anche in questo caso, per valori positivi di p la funzione è decrescente. Il massimo, e quindi il mercato potenziale, si ha quando $p = 0$: $d(0) = \dfrac{a}{0+b} - c = \dfrac{a}{b} - c$.

Esempio 2.4: $d = \dfrac{80}{p+3} - 4$

Possiamo individuare:

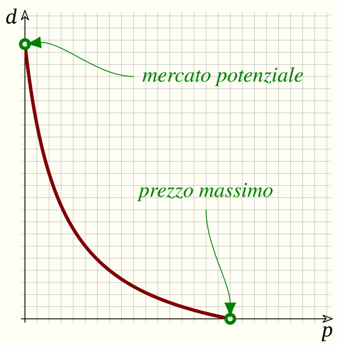
➡ *Il mercato potenziale:*

$$mp = d(0) = \frac{80}{0+3} - 4 = \frac{80}{3} - 4 = \frac{68}{3} \approx 22{,}67$$

➡ *Il prezzo massimo si ottiene cercando l'intersezione del grafico con l'asse dei prezzi:*

$$\begin{cases} d = 0 \\ \dfrac{80}{p+3} - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{80}{p+3} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p+3}{80} = \frac{1}{4} \Rightarrow p + 3 = \frac{80}{4} \Rightarrow p = 17$$



Coefficiente di elasticità della domanda

Coefficiente di elasticità

In microeconomia siamo interessati a studiare quanto è sensibile la domanda rispetto alla variazione dei prezzi il valore che rispecchia questa sensibilità viene detto: *elasticità della domanda*.

L' elasticità della domanda rispetto ai prezzi venne elaborata dall'economista Léon Walras, e indica l'attesa variazione percentuale della domanda di un dato prodotto/servizio (quantità venduta d) rispetto ad una variazione percentuale del prezzo p (elasticità incrociata).

La variazione di prezzo assoluta ci interessa poco, è abbastanza ovvio che l'aumento di prezzo di un euro è poco significativa nell'acquisto di un'automobile, è molto significativa nell'acquisto di un litro di latte. Quindi siamo interessati al rapporto tra la variazione di prezzo o rispetto al prezzo e alla variazione di domanda rispetto alla domanda:

$$\text{variazione relativa del prezzo} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{p_1 - p_0}{p_0}$$
$$\text{variazione relativa della domanda} = \frac{\Delta d}{d} = \frac{d_1 - d_0}{d_0}$$

Queste formule danno le *variazioni medie*, ma se vogliamo la *variazione relativa in un punto*, dobbiamo considerare una differenza infinitesima tra p_0 e p_1. Indicheremo le variazioni infinitesime con:

$$vrp = \frac{\delta p}{p} \quad \text{e} \quad vrd = \frac{\delta d}{d}$$

Altra osservazione: Δd non è una variazione qualunque, ma la variazione di domanda che dipende dalla variazione di prezzo: Δp.

Chiamiamo elasticità della domanda, ε_d, il rapporto tra la variazione relativa della domanda e la variazione relativa del prezzo:

$$\varepsilon_d = -\frac{\frac{\delta d}{d}}{\frac{\delta p}{p}} = \frac{p \cdot \delta d}{d \cdot \delta p}$$

Ogni bene differisce dall'altro per quanto riguarda l'elasticità, ossia la sensibilità alle variazioni del prezzo. L'elasticità della domanda dipende da numerosi fattori economici, anche se tende ad essere più elevata per i beni di lusso, per i quali sono disponibili beni sostitutivi. Mentre i beni di prima necessità tendono ad avere una domanda meno sensibile alle variazioni di prezzo.

Vi sono diverse categorie di elasticità:

domanda elastica rispetto al prezzo quando una certa variazione del prezzo genera una maggiore variazione della domanda: $\varepsilon_d > 1$.

domanda a elasticità unitaria quando una certa variazione del prezzo genera una uguale variazione della domanda: $\varepsilon_d = 1$.

domanda rigida rispetto al prezzo quando una certa variazione del prezzo genera una variazione della domanda inferiore: $\varepsilon_d < 1$.

domanda totalmente rigida rispetto al prezzo quando una certa variazione del prezzo non genera una variazione della domanda: $\varepsilon_d = 0$.

Offerta

In economia, per *offerta* si intende la quantità di un certo bene o servizio che viene messa in vendita in un dato momento a un dato prezzo.

Si suppone che per ogni bene si possa tracciare una curva di offerta rappresentante le diverse quantità messe in vendita dalle imprese di un bene o servizio in corrispondenza di ciascun prezzo.

L'offerta viene influenzata da diversi fattori:

Costi di produzione: la diminuzione dei salari percepiti dagli operai nel settore, abbassa i costi e incrementa l'offerta.

Tecnologia: migliore tecnologia comporta un'iniziale spesa maggiore per la Ricerca e lo Sviluppo, ma in seguito riduce i costi di produzione e incrementa l'offerta.

Prezzi: un aumento dei prezzi incentiva la produzione.

Politiche governative: l'abolizione dei dazi doganali determina un aumento dell'offerta dei prodotti esportabili.

Anche l'offerta può essere modellizzata, in prima approssimazione, come una funzione del prezzo unitario: offerta $= h(p)$; dove p rappresenta il prezzo unitario e h il numero di beni o servizi prodotti e offerti sul mercato.

È abbastanza intuitivo che, all'aumentare del prezzo di un bene o servizio, aumenterà anche il numero delle persone che si organizzano per fornirlo e quindi aumenterà anche l'offerta. La funzione $h(p)$ (offerta) è dunque una funzione crescente.

Alcune caratteristiche:

1. Il prezzo non è negativo: nessun produttore paga gli acquirenti.
2. La produzione ha un limite massimo dovuto a condizioni socio-economiche-ambientali: limite di produzione (LP).
3. All'aumentare dei prezzo unitario aumenta la produzione: La funzione $h(p)$ è crescente.

$$\begin{cases} p \geqslant 0 \\ 0 \leqslant h \leqslant LP \\ h(p_2) > h(p_1) \quad \text{se} \quad p_2 > p_1 \end{cases}$$

Anche in questo caso il modello sarà rappresentato nel primo quadrante del piano cartesiano.

Possiamo avere diversi modelli, matematicamente semplici, che rispettano queste caratteristiche.

In tutti questi modelli:

Intersezione con l'asse $p(h = 0)$ Si incomincia a produrre e quindi ad offrire un bene o un servizio, solo quando il prezzo unitario supera una certa soglia minima che può essere identificata con i costi di produzione (CP).

Inclinazione del grafico $h'(p)$ Maggiore è l'inclinazione, più rapidamente aumenta l'offerta all'aumentare del prezzo.

Intersezione con l'asse del limite di produzione Anche prezzi unitari più elevati non portano ad un aumento di offerta.

Offerta: modello lineare

L'offerta potrebbe avere una relazione lineare con il prezzo:

$$h = ap - b \qquad \text{con} \quad a > 0 \ \text{ e } \ b > 0$$

Il coefficiente della variabile p è un numero positivo, la retta è, perciò, crescente.

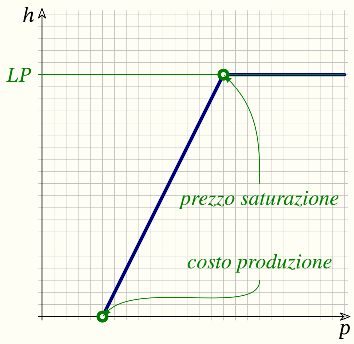
Esempio 2.5: $h = 2p - 10$ *e* $LP = 20$
Possiamo individuare:

➡ *Il costo di produzione è:*

$$\begin{cases} h = 0 \\ 2p - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow cp = \frac{10}{2} = 5$$

➡ *Il prezzo che porta alla saturazione della produzione si ottiene cercando l'intersezione del grafico con l'asse del limite di produzione:*

$$\begin{cases} h = 20 \\ 2p - 10 = 20 \end{cases} \Rightarrow sp = \frac{30}{2} = 15$$



Offerta: modello radice

L'offerta potrebbe avere una crescita rapida una volta superati i costi di produzione per poi rallentare man mano che si avvicina al limite di produzione:

$$h = a\sqrt[n]{p - b} \qquad \text{con} \quad a > 0 \quad \text{e} \quad 0 < b < p$$

Esempio 2.6: $h = 5\sqrt{p - 3}$ *e* $LP = 18$
Possiamo individuare:

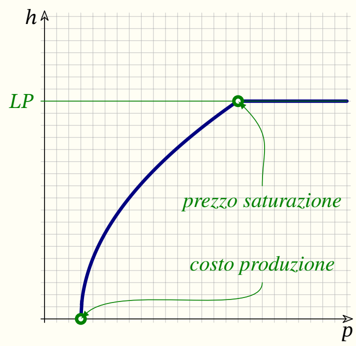
➡ *Il costo di produzione è:*

$$\begin{cases} h = 0 \\ 5\sqrt{p - 3} = 0 \end{cases} \Rightarrow p = 3$$

➡ *Il prezzo che porta alla saturazione della produzione si ottiene cercando l'intersezione del grafico con l'asse del limite di produzione:*

$$\begin{cases} h = 18 \\ 5\sqrt{p - 3} = 18 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{p - 3} = \frac{18}{5} \Rightarrow$$

$$p - 3 = \frac{324}{25} \Rightarrow \Rightarrow p = \frac{324}{25} = \frac{399}{25} \approx 16$$



Offerta: modello potenza

L'offerta potrebbe avere una crescita più lenta con prezzi bassi e sempre più rapida man mano che i prezzi aumentano:

$$h = ap^n - b \qquad \text{con} \quad a > 0 \;\; \text{e} \;\; b > 0 \;\; \text{e} \;\; n > 0$$

Esempio 2.7: $h = 0{,}1p^2 - 1{,}5 \quad e \quad LP = 22$
Possiamo individuare:

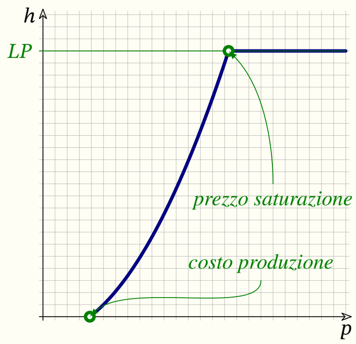
➡ *Il costo di produzione è:*

$$\begin{cases} h = 0 \\ 0{,}1p^2 - 1{,}5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \; p = \sqrt{15} \approx 3{,}87$$

➡ *Il prezzo che porta alla saturazione della produzione si ottiene cercando l'intersezione del grafico con l'asse del limite di produzione:*

$$\begin{cases} h = 22 \\ 0{,}1p^2 - 1{,}5 = 22 \end{cases} \Rightarrow \; 0{,}1p^2 = 23{,}5 \; \Rightarrow$$

$$p^2 = 235 \; \Rightarrow \; \Rightarrow \; p = \sqrt{235} \approx 15{,}33$$



Coefficiente di elasticità dell'offerta

Coefficiente di elasticità

Analogamente a quanto visto per la domanda, anche l'offerta ha un suo coefficiente di elasticità rispetto al prezzo.

Anche qui siamo interessati alla variazione relativa dell'offerta:

$$\text{variazione relativa dell'offerta} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{h_1 - h_0}{h_0}$$

Queste formule danno le *variazioni medie*, se vogliamo la variazione in un punto dobbiamo considerare una differenza infinitesima tra p_0 e p_1. Indicheremo le variazioni infinitesime con:

$$vrd = \frac{\delta h}{h}$$

Chiamiamo elasticità dell'offerta, ε_h, il rapporto tra la variazione relativa dell'offerta e la variazione relativa del prezzo:

$$\varepsilon_h = -\frac{\frac{\delta h}{h}}{\frac{\delta p}{p}} = \frac{p \cdot \delta h}{h \cdot \delta p}$$

Anche per l'elasticità dell'offerta possiamo distinguere alcuni casi:

offerta elastica rispetto al prezzo quando una certa variazione del prezzo genera una maggiore variazione della offerta: $\varepsilon_h > 1$.

offerta a elasticità unitaria quando una certa variazione del prezzo genera una uguale variazione della offerta: $\varepsilon_h = 1$.

offerta rigida rispetto al prezzo quando una certa variazione del prezzo genera una variazione della offerta inferiore: $\varepsilon_h < 1$.

offerta totalmente rigida rispetto al prezzo quando una certa variazione del prezzo non genera una variazione della offerta: $\varepsilon_h = 0$.

2.6 Prezzo di equilibrio

Concorrenza perfetta e monopolio

Diremo che siamo in regime di *concorrenza perfetta* quando si verificano le seguenti caratteristiche:

Polverizzazione (atomizzazione) del mercato: esistono molti piccoli produttori dello stesso bene.

Omogeneità del prodotto: le imprese non hanno la possibilità di differenziare i propri prodotti; di conseguenza, il consumatore percepisce in maniera identica il valore dello stesso prodotto di due imprese distinte.

Assenza di barriere all'entrata: le imprese che vogliono entrare nel mercato non incontrano alcun ostacolo.

Il *monopolio*, invece, è una forma di mercato in cui una merce, di cui non esiste un sostituto equivalente, è prodotta da un'unica impresa. Sono inoltre presenti delle barriere all'entrata, quindi non è possibile per le altre imprese entrare facilmente nel mercato.

Determinazione del prezzo di equilibrio

Se siamo in presenza di concorrenza perfetta, per un certo bene, il prezzo dipende solo dalla domanda e dall'offerta del mercato.

Il prezzo p di un prodotto, che rende massimo il ricavo, è determinato dall'equilibrio tra le due curve della domanda d e dell'offerta h.

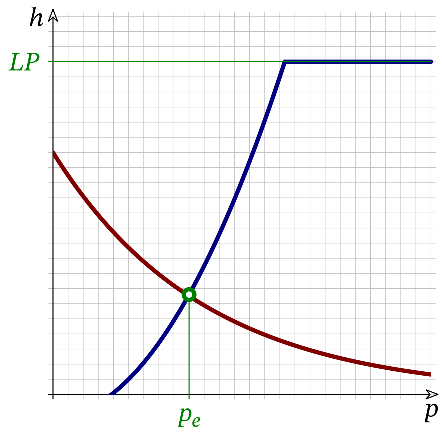
Chiameremo *prezzo di equilibrio* (p_e) il prezzo per il quale la domanda e l'offerta coincidono:

$$d(p_e) = h(p_e)$$

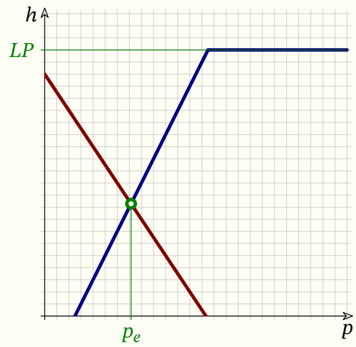
Per questo prezzo tutta la domanda di un bene o di un servizio è soddisfatta e tutta l'offerta è esaurita.

Disegnando nello stesso piano i grafici della domanda e dell'offerta, il prezzo di equilibrio è l'ascissa dell'intersezione dei due grafici e si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} d = d(p) \\ h = h(p) \end{cases} \quad d = h \Rightarrow d(p) = h(p)$$



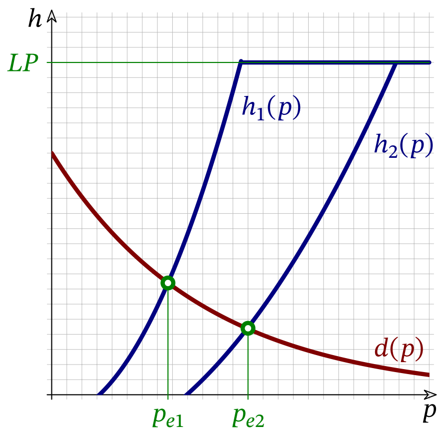
Esempio 2.8: *Trova il prezzo di equilibrio quando la funzione domanda è:* $d = -3p + 4$ *e la funzione offerta è:* $h = +5p - 1$ *e* $LP = 22$



Il prezzo di equilibrio si ottiene risolvendo l'equazione:

$$-3p_e + 4 = +5p_e - 1 \Rightarrow$$
$$-3p_e - 5p_e = -4 - 1 \Rightarrow$$
$$-8p_e = -5 \Rightarrow$$
$$p_e = +\frac{5}{8} = 0{,}625$$

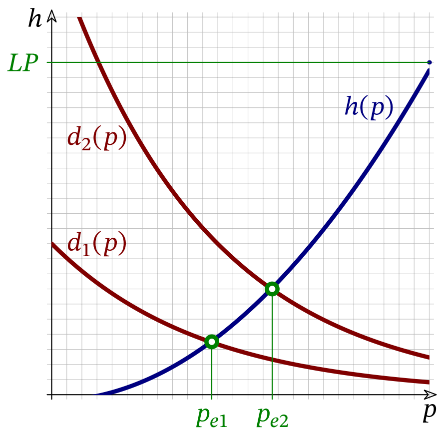
Offerta variabile



Se la domanda è fissa e l'offerta è variabile

$$h_2(x) < h_1(x) \Rightarrow p_{e2} > p_{e1}$$

Domanda variabile



Se l'offerta è fissa e la domanda è variabile

$$d_2(x) > d_1(x) \Rightarrow p_{e2} > p_{e1}$$

2.7 Esercizi

2.1. *Data la funzione* $d(p) = \dfrac{750 - 5p}{25}$ *determina:*

a) per quali valori di p può essere assunta come una funzione di domanda;
b) dopo averne costruito il grafico, determina il valore massimo e minimo assunto dalla funzione;
c) la quantità di bene domandata in corrispondenza del prezzo media aritmetica tra prezzo massimo e prezzo minimo;
d) il coefficiente di elasticità per una variazione di prezzo da $p_1 = 100$ *a* $p_2 = 125$ *e la conseguente classificazione della domanda.*

2.2. *La funzione di domanda e di offerta di un certo prodotto sono espresse dalle seguenti equazioni:*

$$d(p) = -2p^2 + 1200 \quad h(p) = -40 + 22p$$

Dopo aver rappresentato le due curve, determina il prezzo di equilibrio e la quantità di merce domandata ed offerta a tale prezzo.

2.3. *Una funzione offerta è lineare. Sappiamo che:* $h(4) = 8$ *e* $h(10) = 56$.

a) Rappresenta la funzione e verifica che può essere assunta come funzione offerta.
b) Determina la sua equazione.
c) Determina il prezzo al di sotto del quale i produttori non sono disposti a immettere il bene sul mercato.
d) Il prezzo massimo, supponendo una capacità produttiva massima di 296 *unità.*

2.4. *Data la funzione* $d(p) = 2500 - p^2$ *determina:*

a) per quali valori di p può essere assunta come una funzione di domanda;
b) dopo averne costruito il grafico, determina il valore massimo e minimo assunto dalla funzione;
c) determina il prezzo limite a partire dal quale nessuno è disposto a comprare il bene;
d) il coefficiente di elasticità per una variazione di prezzo da $p_1 = 20$ *a* $p_2 = 30$ *e la conseguente classificazione della domanda.*

2.5. *La funzione di domanda e di offerta di un certo prodotto sono espresse dalle seguenti equazioni:*

$$d(p) = -2p + 650 \quad h(p) = -850 + 4p$$

Dopo aver rappresentato le due funzioni, determina il prezzo di equilibrio e la quantità di merce domandata ed offerta a tale prezzo.

2.6. *Una funzione offerta è lineare. Sappiamo che:* $h(10) = 40$ *e* $h(60) = 12$.

a) Determina la sua equazione.
b) Rappresenta la funzione e verifica che può essere assunta come funzione offerta.

2.7. *La domanda e l'offerta di un bene sono descritte dalle funzioni:*

$$d(p) = -6p + a \quad h(p) = +4p^2 + b$$

determina a *e* b*, sapendo che il prezzo di equilibrio è* $p_e = 20$ *e la corrispondente quantità domandata e offerta è uguale a* 200 *unità.*

Problemi di scelta 3

In questo capitolo incontrerai:

- un altro modo per tracciare rette nel primo quadrante;
- la funzione a denti di sega;
- le disequazioni in due variabili;
- problemi di programmazione lineare;
- il problema delle scorte.

3.1 Alcuni strumenti di base

Prima di affrontare direttamente i problemi di scelta, riprendiamo alcuni problemi di algebra, o non ancora affrontati o per i quali conviene seguire delle soluzioni diverse da quelle proposte a suo tempo.

In questo capitolo affronteremo principalmente problemi che possono essere rappresentati nel primo quadrante del piano cartesiano cioè problemi dove le variabili in gioco sono positive.

Grafico di una funzione lineare

Abbiamo già incontrato il problema di disegnare il grafico di una equazione lineare in due variabili, vedi il capitolo "rette" della "Geometria analitica". Abbiamo trovato un metodo molto efficiente quando l'equazione è data nella forma esplicita di questo tipo: $y = \frac{a}{b}x + c$. Nei problemi seguenti dovremo disegnare rette date in forma implicita: $ax + by + c = 0$. Ovviamente è sempre possibile trasformare l'equazione implicita esplicitando la variabile y e applicare il metodo già appreso, ma, di seguito verrà suggerito un metodo più comodo; soprattutto se siamo interessati alla rappresentazione nel solo primo quadrante.

Rette decrescenti

Se una retta interseca l'asse y in un punto con ordinata positiva, intersecherà anche l'asse x in un punto con ascissa positiva se è decrescente.

Una retta del tipo $ax + by + c = 0$ è decrescente se a e b hanno lo stesso segno cioè se $a \cdot b > 0$

Per disegnare la retta nel primo quadrante possiamo quindi calcolare le intersezioni con gli assi, $(0;\ y_0)$ e $(x_0;\ 0)$, e usarle come punti di base per tracciarla.

- L'intersezione con l'asse y si ottiene ponendo $x = 0$ e calcolando il corrispondente valore di y: $y_0 = -\dfrac{c}{b}$;
- L'intersezione con l'asse x si ottiene ponendo $y = 0$ e calcolando il corrispondente valore di x: $x_0 = -\dfrac{c}{a}$.

Procedura 3.1 (Disegno retta): *Per disegnare una retta:*
1. *Calcola l'intersezione con l'asse y.*
2. *Calcola l'intersezione con l'asse x.*
3. *Traccia la retta per questi due punti.*

Esempio 3.1: *Traccia il grafico della retta di equazione:* $0{,}3x+0{,}4y-1800 = 0$ *nel primo quadrante.*

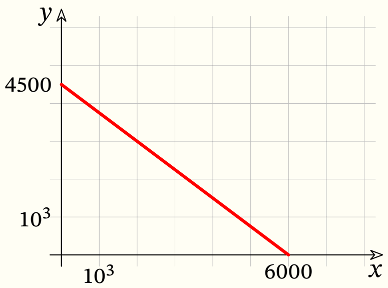
1. *Intersezione con l'asse y:*

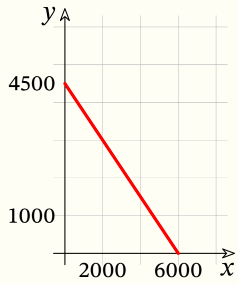
$$\begin{cases} x = 0 \\ 0{,}3x + 0{,}4y - 1800 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0{,}4y = 1800 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1800}{0{,}4} = 4500 \end{cases}$$

2. *Intersezione con l'asse x:*

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0{,}3x + 0{,}4y - 1800 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0{,}3x = 1800 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{1800}{0{,}3} = 6000 \end{cases}$$

3. *Traccia la retta per questi due punti.*





Dall'esempio precedente si può vedere che la stessa retta può essere rappresentata in diversi modi a seconda delle scale adottate per gli assi. Nei problemi che affronteremo in questo capitolo, spesso sui due assi non sono rappresentate grandezze omogenee e è spesso utile adottare scale di rappresentazione diverse.

Rette parallele a uno degli assi

Se in una retta $ax + by + c = 0$ è nullo il coefficiente di una variabile non possiamo calcolare le due intersezioni; se è nullo a esiste solo l'intersezione con l'asse y se è nullo b esiste solo l'intersezione con l'asse x:

- se $a = 0$, la retta è parallela all'asse x e passa per: $y_0 = -\dfrac{c}{b}$;
- se $b = 0$, la retta è parallela all'asse y e passa per: $x_0 = -\dfrac{c}{a}$.

Rette crescenti

Se in una retta del tipo $ax + by + c = 0$ i coefficienti a e b hanno segni diversi cioè se $a \cdot b < 0$ il coefficiente angolare risulterà positivo e la retta sarà crescente. In questo caso non potrà intersecare entrambi i semiassi positivi.

Per disegnarla possiamo calcolare l'intersezione con uno degli assi, e un altro punto posto vicino al bordo del nostro disegno.

Esempio 3.2: *Traccia, nel primo quadrante, il grafico delle seguenti rette:*

$a\colon\ 7x - 1400 = 0;$ $\quad b\colon\ 2y - 6000 = 0;$

$c\colon\ 5x - 0{,}5y + 2000 = 0;$ $\quad d\colon\ 10x - 0{,}2y + 1000 = 0$

a: Retta parallela all'asse y con $x_0 = \dfrac{1400}{7} = 200$

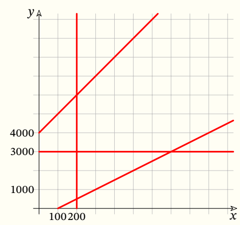
b: Retta parallela all'asse x con $y_0 = \dfrac{6000}{2} = 3000$

c: Intersezione asse y: $y_0 = \dfrac{2000}{0{,}5} = 4000$

$y_1 = 10000;\quad x_1 = \dfrac{0{,}5 \cdot 10000 - 2000}{5} = 600$

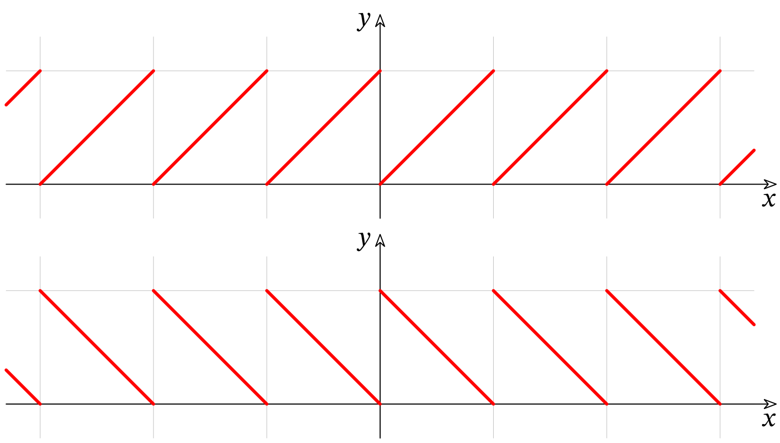
d: Intersezione asse x: $x_0 = \dfrac{1000}{10} = 100$

$x_1 = 1000;\quad y_1 = \dfrac{10 \cdot 1000 - 1000}{0{,}2} = 4500$



Funzione a denti di sega

Una funzione particolare che verrà usata nei problemi relativi alla gestione di magazzini, è la funzione a "denti di sega". La funzione prende il nome dalla sua forma:



Le espressioni algebriche delle funzioni viste sopra sono:

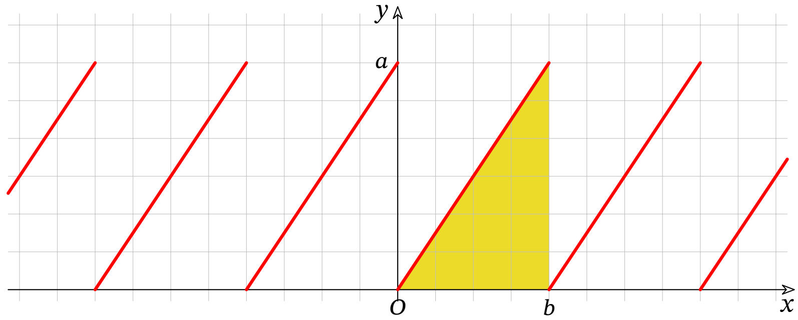
$$f_1(x) = \mathrm{frac}(x) \qquad f_2(x) = 1 - \mathrm{frac}(x)$$

dove $\mathrm{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$ indica la parte frazionaria di x cioè il valore di x meno la sua parte intera.

È possibile variare l'altezza o l'ampiezza dei denti agendo su due fattori, l'espressione generale è:

$$f_1(x) = a \cdot \text{frac}\left(\frac{x}{b}\right)$$

Esempi:



La lunghezza di ogni segmento è data da: $l = \sqrt{a^2 + b^2}$.

L'area sottesa ad ogni segmento è data da: $s = \dfrac{ab}{2}$.

Segno del polinomio lineare in due variabili

A volte è necessario studiare il segno di un polinomio lineare in due variabili: $ax+by+c$.

Abbiamo visto nel primo capitolo dedicato allo studio del segno, che il problema del segno dei polinomi di primo grado in una variabile ha una semplice rappresentazione su un asse cartesiano tagliato da una retta. Il segno dei trinomi di primo grado in due variabili può essere rappresentato convenientemente in un piano cartesiano tagliato dal piano: $z = ax + by + c$.

Possiamo distinguere 2 casi:

1. Se a e b sono entrambi nulli, il piano $z = c$ è parallelo al piano xy quindi sarà tutto positivo o tutto negativo a seconda del segno del termine noto c.

2. Se a o b non sono nulli, il piano $z = ax + by + c$ non è parallelo al piano xy quindi lo interseca lungo un retta. Dato che il piano xy ha equazione $z = 0$, l'intersezione tra questi due piani si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} z = 0 \\ z = ax + by + c \end{cases} \Rightarrow \; ax + by + c = 0$$

   Chiamiamo quest'ultima equazione: *retta associata al polinomio*. Le coordinate dei punti che appartengono alla retta rendono nullo il polinomio.

   Il piano secante viene tagliato dalla retta in due semipiani, uno si trova sopra al piano xy e sarà la parte positiva e uno sotto e sarà la parte negativa.

   La retta divide anche il piano xy in due semipiani: chiamiamo *semipiano positivo* quello formato dai punti le cui coordinate rendono positivo il polinomio, *semipiano negativo* quello che lo rendono negativo.

   Per individuare il semipiano positivo e quello negativo, possiamo utilizzare uno dei seguenti criteri:

a) Se $a > 0$ il semipiano positivo è quello che sta a destra della retta e il semipiano negativo è quello che sta a sinistra della retta (e viceversa se $a < 0$).

b) Se $b > 0$ il semipiano positivo è quello che sta sopra alla retta e il semipiano negativo è quello che sta sotto alla retta (e viceversa se $b < 0$).

Procedura 3.2 (Segno del polinomio lineare in due variabili): *Per studiare il segno di un polinomio lineare in 2 variabili, $ax + by + c$:*

1. *Disegna la retta associata al polinomio: $ax + by + c = 0$.*
2. *Osservando il segno del coefficiente a, o del coefficiente b, individua i semipiani positivo e negativo.*

Esempio 3.3: *Studia il segno del polinomio:* $11x + 445y - 44055$.

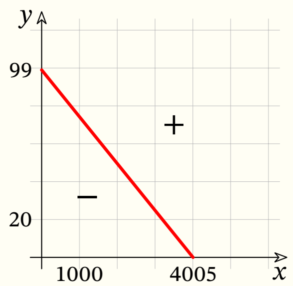
1. Per disegnare la retta associata, trovo le sue intersezioni con gli assi:

$$x_0 = -\frac{c}{a} = \frac{44055}{11} = 4005$$

$$y_0 = -\frac{c}{b} = \frac{44055}{445} = 99$$

Ci conviene usare scale diverse nei due assi.

2. Dato che $a > 0$, il semipiano positivo è quello a destra della retta.



Disequazione lineare in due variabili

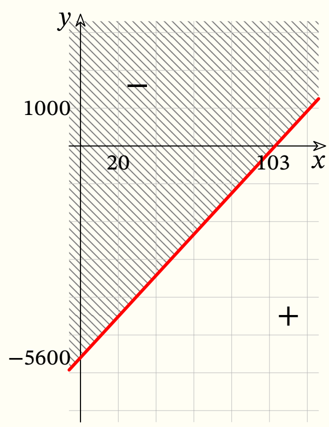
Per risolvere una disequazione lineare in due variabili, basta studiare il segno del polinomio associato alla disequazione e poi cancellare il semipiano dove la disequazione risulta falsa.

Esempio 3.4: *Risolvi la disequazione:* $546x - 10y - 56000 \geqslant 0$

1. retta associata al trinomio:
$546x - 10y - 56000 = 0$;

intersezione con l'asse y:
$y_0 = \dfrac{56000}{-10} = -5600$

intersezione con l'asse x:
$x_0 = \dfrac{56000}{546} \approx 103$



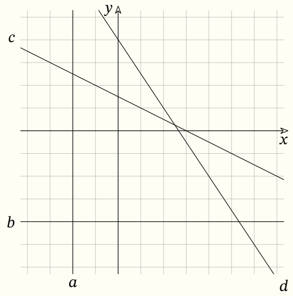
2. Le coordinate dei punti della retta rendono nullo il polinomio. E dato che $b < 0$, le coordinate dei punti del semipiano sopra la retta rendono il polinomio negativo, quelli del semipiano sotto la retta lo rendono positivo.

3. La soluzione della disequazione è rappresentata dalla retta e dai punti del semipiano che sta sotto alla retta.

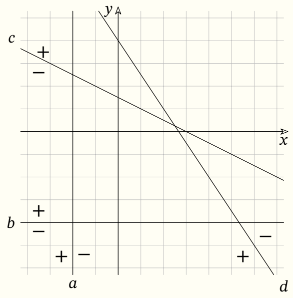
Esempio 3.5: *Risolvi il seguente sistema di disequazioni:*

$$\begin{cases} -x - 2 \leqslant 0 \\ +y + 4 > 0 \\ +x + 2y - 3 < 0 \\ -2x - 3y + 12 \geqslant 0 \end{cases}$$

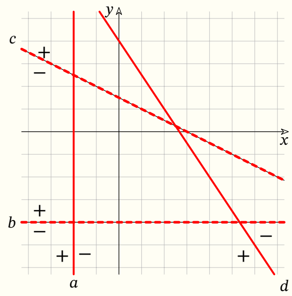
1. Tracciamo con un tratto sottile le tre rette associate ai polinomi:
$a: \ -x - 2 = 0$;
$b: \ +y + 4 = 0$;
$c: \ +x + 2y - 3 = 0$;
$d: \ -2x - 3y + 12 = 0$;



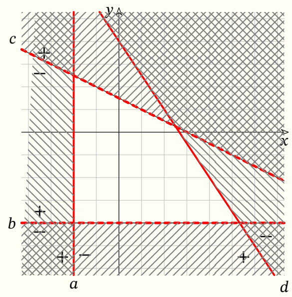
2. Per ogni retta individuiamo i semipiani che rendono il polinomi positivi o negativi.



3. Dove sono accettabili anche i valori nulli, segniamo le rette con un tratto continuo, dove c'è una diseguaglianza stretta le segniamo con una linea tratteggiata.



4. Cancelliamo i semipiani che non soddisfano le disequazioni ottenendo un poligono. In questo caso, un poligono finito.

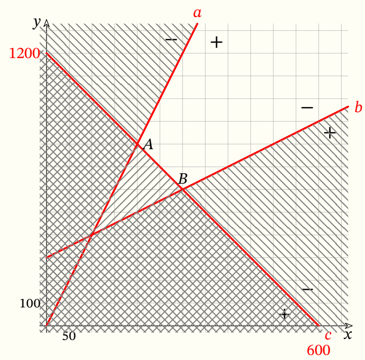


La parte di piano non cancellata compreso il bordo, dove tracciato con tratto continuo, è formata dai punti le cui coordinate sono soluzione del sistema.

Esempio 3.6: *Calcola i vertici del poligono individuato dal seguente sistema di disequazioni:* $\begin{cases} 2x - y \geqslant 0 \\ x - 2y + 600 \leqslant 0 \\ -x - y + 1200 \leqslant 0 \end{cases}$

1. Disegniamo, con un tratto sottile, le tre rette associate ai polinomi:
$a\ :\ 2x - y = 0;\quad b\ :\ x - 2y + 600 = 0;\quad c\ :\ -x - y + 1200 = 0;$

2. Per la retta $\mathtt{a}$ il semipiano positivo è quello che sta sotto e a destra, per $\mathtt{b}$ il semipiano positivo è quello che sta sotto e a destra, per $\mathtt{c}$ il semipiano positivo è quello che sta sotto e a sinistra.



3. Osservando i predicati delle disequazioni, vediamo che sono accettabili anche i valori nulli quindi segniamo le rette con un tratto continuo.

4. Cancelliamo i semipiani che non soddisfano le disequazioni.

La soluzione del sistema di disequazioni è rappresentata dalla parte di piano non cancellata compresi i bordi.

È un poligono infinito che ha solo due vertici: $A = a \cap c$ *e* $B = b \cap c$*:*

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x - y + 1200 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 1200 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 800 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 600 = 0 \\ -x - y + 1200 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 600 = 0 \\ 3y + 1800 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 600 \\ y = 600 \end{cases}$$

3.2 Ricerca operativa

Alcuni problemi di programmazione economica richiedono di trovare una soluzione ottimale in una situazione dove ci sono delle limitazioni. La scelta ottimale, tipicamente, sarà quella di rendere massimo il guadagno o rendere minimo il costo. Per aumentare il guadagno si potrebbe produrre di più, ma questo non è possibile farlo all'infinito, ci sono dei vincoli alla produzione che possono riguardare la capacità di lavorazione dei prodotti, di approvvigionamento di materie prime, di stoccaggio e di vendita dei prodotti finiti.

Questi problemi sono caratterizzati dai seguenti elementi:

- l'insieme numerico in cui si opera;
- la funzione obiettivo da massimizzare o minimizzare;
- un insieme di vincoli .

Noi affronteremo problemi che possono essere modellizzati usando come

- insieme numerico: i numeri reali;
- funzione obiettivo: una funzione lineare in due variabili;
- insieme di vincoli: un sistema di disequazioni lineari in due variabili.

Queste limitazioni permettono di rappresentare e risolvere il problema usando strumenti che conosciamo.

Vediamo come risolvere questi problemi seguendo passo passo un esempio.

Problema 3.7 (Programmazione lineare 1): *Un laboratorio di pasticceria produce due tipi di paste fermentate: la Torta della Nonna e la Torta delle Rose. Per produrre un kg di Torta della Nonna gli ingredienti principali sono* 0,6 kg *di farina,* 0,2 kg *di burro,* 0,1 kg *di uova,* 0,1 kg *di marmellata. Per produrre un kg di Torta delle Rose gli ingredienti principali sono* 0,5 kg *di farina,* 0,3 kg *di burro,* 0,2 kg *di uova. A causa dei problemi di approvvigionamento e dei limiti dovuti alle impastatrici e ai forni, ogni mese il laboratorio non può trattare più di* 330 kg *di farina,* 140 kg *di burro* 90 kg *di uova,* 32 kg *di marmellata. Un kg di Torta della Nonna produce un guadagno di* 12 €*, un kg di Torta delle Rose produce un guadagno di* 11 €*. Quanti kg di Torta della Nonna e di Torta delle Rose devono essere prodotti per massimizzare il profitto?*

Primo passo: raccogliamo i dati in una tabella

Come primo passo raccogliamo i dati in una tabella a doppia entrata:

	Torta della Nonna	Torta delle Rose	Disponibilità
farina	0,6	0,5	330
burro	0,2	0,3	140
uova	0,1	0,2	90
marmellata	0,1	0,0	45

Secondo passo: individuiamo le variabili e la funzione obiettivo

Per quanto riguarda le variabili, chiamiamo:

- x_N il numero di kg di Torta della Nonna,
- x_R il numero di kg di Torta delle Rose.

Possiamo osservare che, anche se non esplicitato nel testo del problema, non ha senso produrre un numero negativo di torte. Quindi possiamo aggiungere i due vincoli:

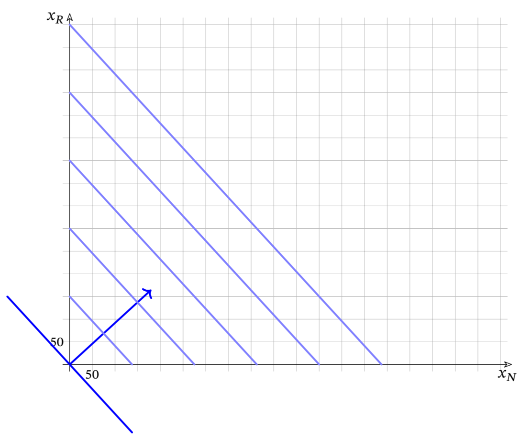
$$x_N \geqslant 0 \qquad x_R \geqslant 0$$

Questi vincoli concretamente significano che lavoreremo solo nel primo quadrante del piano cartesiano.

Il nostro obiettivo è quello di massimizzare il profitto e la funzione che esprime il profitto è detta *funzione obiettivo*:

$$(\max) \quad P(x_N;\ x_R) = 12x_N + 11x_R$$

La funzione obiettivo può essere rappresentata nel piano x_N, x_R da un fascio di rette parallele e dal vettore perpendicolare a queste rette. Il vettore indica la direzione in cui la funzione obiettivo cresce. Nel nostro caso, l'allontanarsi dall'origine della retta verso destra e verso l'alto indica un maggiore profitto.

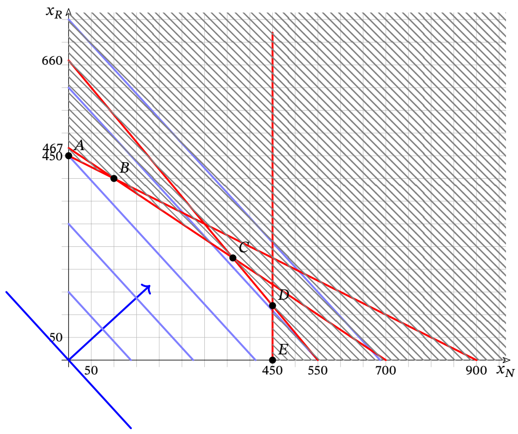


Terzo passo: insieme di accettabilità delle variabili

Trasformiamo i vincoli in un sistema di disequazioni in due variabili:

$$\begin{cases} 0{,}6x_N + 0{,}5x_R \leqslant 330 \\ 0{,}2x_N + 0{,}3x_R \leqslant 140 \\ 0{,}1x_N + 0{,}2x_R \leqslant 90 \\ 0{,}1x_N \leqslant 45 \end{cases}$$

Poi rappresentiamo le disequazioni nel piano cartesiano ottenendo così l'insieme di accettabilità delle variabili (la regione non cancellata):



Ora dobbiamo cercare la retta del fascio più distante dall'origine (e quindi che rappresenta il massimo), ma che abbia almeno un punto in comune con l'insieme di accettabilità delle variabili.

Osservando il grafico è evidente che la retta cercata è una retta che passa per uno dei vertici del poligono. Dobbiamo allora calcolare le coordinate di questi vertici che sono le intersezioni delle rette associate alle disequazioni:

$$A = \begin{cases} x_N = 0 \\ x_R = 450 \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 0{,}2x_N + 0{,}3x_R = 140 \\ 0{,}1x_N + 0{,}2x_R = 90 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_N + 3x_R = 1400 \\ -2x_N - 4x_R = -1800 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_N + 3x_R = 1400 \\ -x_R = -400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = 100 \\ x_R = 400 \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} 0{,}6x_N + 0{,}5x_R = 330 \\ 0{,}2x_N + 0{,}3x_R = 140 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6x_N + 5x_R = 3300 \\ -6x_N - 9x_R = 4200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_N + 5x_R = 3300 \\ -4x_R = -900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = 362.5 \\ x_R = 225 \end{cases}$$

$$D = \begin{cases} 0{,}1x_N = 45 \\ 0{,}6x_N + 0{,}5x_R = 330 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = 450 \\ 6x_N + 5x_R = 3300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = 450 \\ x_R = 120 \end{cases}$$

$$E = \begin{cases} x_N = 450 \\ x_R = 0 \end{cases}$$

Quarto passo: ricerca della soluzione ottimale

A questo punto possiamo calcolare il profitto per i diversi valori delle variabili individuati dalle coordinate dei vertici del poligono. Magari per questo calcolo possiamo usare in modo intelligente la calcolatrice o un foglio di calcolo.

Punto	x_N	x_R	Profitto $= 12x_N + 11x_R$
A	0	450	$12 \cdot 0 + 11 \cdot 450 = 4\,950$
B	100	400	$12 \cdot 100 + 11 \cdot 400 = 5\,600$
C	362,5	225	$12 \cdot 362{,}5 + 11 \cdot 225 = 6\,825$
D	450	120	$12 \cdot 450 + 11 \cdot 120 = 6\,720$
E	450	0	$12 \cdot 450 + 11 \cdot 0 = 5\,400$

Come appare evidente in quest'ultima tabella, si ottiene il massimo profitto sostituendo le variabili della funzione obiettivo con le coordinate del punto C, infatti la retta del fascio che passa per questo punto è la più lontana dall'origine e ha con l'insieme di accettabilità un'intersezione non vuota.

Quindi si ottiene il massimo profitto producendo:

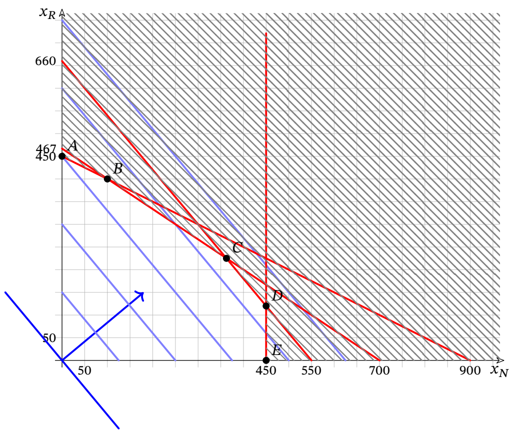
- 362,5 kg di Torta della Nonna,
- 225 kg di Torta delle Rose.

Problema 3.8 (Programmazione lineare 2): *Riprendiamo il problema 3.7, ma il profitto è cambiato: un kg di Torta della Nonna produce un guadagno di 12 €, un kg di Torta delle Rose produce un guadagno di 10 €. Quanti kg di Torta della Nonna e di Torta delle Rose devono essere prodotti per massimizzare il profitto?*

Buona parte del problema viene svolto esattamente come quello precedente, ma la funzione obiettivo è diversa:

$$(\max) \quad P(x_N;\ x_R) = 12x_N + 10x_R$$

Nella rappresentazione le linee che rappresentano il fascio collegato alla funzione obiettivo hanno una pendenza diversa:
Si può osservare che ora il fascio di rette è parallelo al segmento CD. Compilando la tabella del profitto con la nuova funzione obiettivo si ottiene:



Punto	x_N	x_R	Profitto $= 12x_N + 10x_R$
A	0	450	$12 \cdot 0 + 10 \cdot 450 = 4\,500$
B	100	400	$12 \cdot 100 + 10 \cdot 400 = 5\,200$
C	362,5	225	$12 \cdot 362{,}5 + 10 \cdot 225 = 6\,600$
D	450	120	$12 \cdot 450 + 10 \cdot 120 = 6\,600$
E	450	0	$12 \cdot 450 + 10 \cdot 0 = 5\,400$

Osserviamo che le coordinate dei punti C e D producono lo stesso profitto: in questo caso anche le coordinate di tutti i punti del segmento CD produrranno un profitto di 6 600 €.

Problema 3.9 (Programmazione lineare 3): *Un'industria deve produrre una bevanda alla frutta contenente vitamina C, sali minerali e un certo numero di calorie. La bevanda è ottenuta mescolando purea di frutta dal costo di* 0,60 €/ kg *e una miscela dolcificante dal costo di* 0,40 €/ kg. *Ogni kg di purea di frutta contiene:* 1400 mg *di vitamina C,* 200 mg *di sali minerali e* 1800 kj *di energia. Un kg di miscela dolcificante contiene:* 0 mg *di vitamina C,* 100 mg *di sali minerali e* 3600 kj *di energia. Il prodotto in vendita deve contenere: almeno* 700 mg *di vitamina C, almeno* 300 mg *di sali minerali e un contenuto di energia di ameno* 2500 kj. *Si devono determinare le quantità di purea di frutta e di miscela dolcificante da miscelare per produrre la bevanda per minimizzare il costo complessivo dei due componenti base.*

Primo passo: raccogliamo i dati in una tabella

Come primo passo raccogliamo i dati in una tabella a doppia entrata:

	Purea di frutta	miscela dolcificante	Minimo nel prodotto finale
vitamina C	1400	0	700
sali minerali	200	100	300
energia	1800	3600	2500

Secondo passo: individuiamo le variabili e la funzione obiettivo

Per quanto riguarda le variabili, chiamiamo:

- ➡ x_F il numero di kg di purea di frutta,
- ➡ x_D il numero di kg di miscela dolcificante.

Non ha senso utilizzare una quantità negativa di ingredienti, quindi possiamo aggiungere i due vincoli: $x_F \geqslant 0 \quad x_D \geqslant 0$.

Ora la funzione obiettivo, vogliamo minimizzare il costo che è dato da:

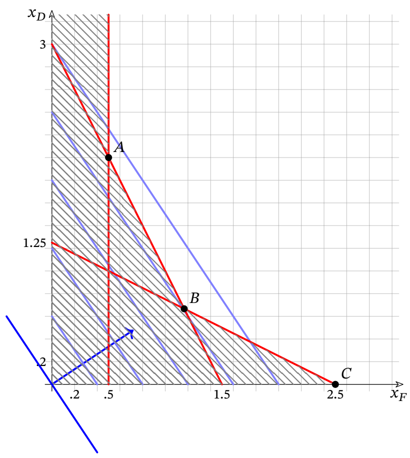
$$(\min) \quad P(x_F;\ x_D) = 0{,}60x_F + 0{,}40x_D$$

Terzo passo: insieme di accettabilità delle variabili

Trasformiamo i vincoli in un sistema di disequazioni in due variabili:

$$\begin{cases} 1400x_F \geqslant 700 \\ 200x_F + 100x_D \geqslant 300 \\ 1800x_F + 3600x_D \geqslant 4500 \end{cases}$$

Poi rappresentiamo le disequazioni nel piano cartesiano ottenendo così l'insieme di accettabilità delle variabili (la regione non cancellata) che è un poligono infinito.



Ora dobbiamo cercare la retta del fascio più distante dall'origine (e quindi che rappresenta il massimo), ma che abbia almeno un punto in comune con l'insieme di accettabilità delle variabili.

Osservando il grafico è evidente che la retta cercata è una retta che passa per uno dei vertici del poligono. Dobbiamo allora calcolare le coordinate di questi vertici che sono le intersezioni delle rette associate alle disequazioni:

$$A = \begin{cases} 1400x_F = 700 \\ 200x_F + 100x_D = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14x_F = 7 \\ 2x_F + x_D = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_F = 0{,}5 \\ x_D = 2 \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 200x_F + 100x_D = 300 \\ 1800x_F + 3600x_D = 4500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_F - x_D = -3 \\ 2x_F + 4x_D = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_D = 2 \\ 2x_F + 4x_D = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_F = \dfrac{7}{6} \\ x_D = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} x_F = 2.5 \\ x_D = 0 \end{cases}$$

Quarto passo: ricerca della soluzione ottimale

A questo punto possiamo calcolare il costo nei 3 punti individuati:

Punto	x_F	x_D	Costo $= 0{,}6x_F + 0{,}4x_D$
A	0,5	2	$0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 2 = 3{,}8$
B	1,167	0,667	$0{,}6 \cdot 1{,}167 + 0{,}4 \cdot 0{,}667 = 0{,}967$
C	2,5	0	$0{,}6 \cdot 2{,}5 + 0{,}4 \cdot 0 = 1{,}5$

Abbiamo il minimo quando sostituiamo nella funzione obiettivo le coordinate del punto B, il minimo costo dunque si ottiene miscelando:

- $\frac{7}{6}$ kg di Purea di Frutta,
- $\frac{2}{3}$ kg di Miscela Dolcificante.

3.3 Problema delle scorte

Il problema

Il problema delle scorte riguarda ogni impresa che utilizza materie prime di cui deve rifornirsi e conservare in magazzino.

Esempio 3.10: *Esempi di attività che richiedono un magazzino.*

- *Un panificio usa una certa quantità di farina che deve avere sempre a disposizione altrimenti si ferma la produzione.*
- *Un negozio di detersivi deve avere un magazzino che permetta di rifornire gli scaffali.*
- *Un mobilificio deve avere a disposizione il legname necessario alla realizzazione dei mobili.*
- …

E dove sta il problema? Avere delle scorte immagazzinate è un costo per l'impresa, è un costo che è proporzionale alla quantità di merce stoccata in magazzino. Quindi l'ideale sarebbe un meccanismo, magico, che fornisce il materiale di cui l'impresa ha bisogno esattamente quando le serve. Una soluzione potrebbe essere quella di ordinare ogni giorno esattamente la quantità di merce che verrà usata in quella giornata…
E il problema del magazzino è risolto: non ho più bisogno del magazzino!

Ma l'impresa non ha solo costi di magazzino, anche gli ordini hanno dei costi. Alcuni di questi sono dei costi che dipendono dal costo delle materie prime e dipendono dalla quantità consumata. Ma ci sono anche dei costi fissi per ogni ordine. Per ridurre questi costi, si deve ridurre il numero di ordini. L'ideale sarebbe ordinare tutto in una volta il materiale che serve. E il problema degli ordini è risolto: faccio un solo ordine!

Ma un'impresa ha sia il problema del magazzino sia quello degli ordini: riducendo il costo del magazzino aumenta il costo degli ordini, riducendo il costo degli ordini aumenta quello del magazzino. Il problema si fa più interessante: date alcune condizioni dobbiamo trovare la quantità di materiali da richiedere ad ogni ordine per ridurre la somma delle spese del magazzino e degli ordini.

Indichiamo con **x** la quantità di materiali da richiedere ad ogni ordine.

Gli ordini

L'impresa ha bisogno, per un certo lasso di tempo, di una certa quantità di materie da lavorare. Chiamiamo:

t il lasso di tempo considerato;
Q il fabbisogno di materie da lavorare;
n il numero di ordini da effettuare nel lasso di tempo considerato;
T il periodo, cioè l'intervallo di tempo tra un ordine e l'altro.

La realtà è sempre molto più complicata di qualunque problema matematico, ma per riuscire a realizzare un modello risolvibile con pochi calcoli, operiamo alcune semplificazioni. Supponiamo che:

1. i costi non varino nel tempo;
2. il fabbisogno di materiale sia uniforme nel tempo;
3. i costi non dipendano dalla quantità acquistata;
4. la quantità ordinata sia sempre la stessa a ogni ordine.

Se consideriamo come parametro fissato in una data situazione il fabbisogno complessivo Q, allora il numero di ordini n dipende dalla quantità x che viene ordinata ogni volta:

$$n = \frac{Q}{x}$$

Conoscendo poi il lasso di tempo complessivo, possiamo calcolare l'intervallo di tempo tra un ordine e l'altro cioè il periodo:

$$T = \frac{t}{n} \qquad \text{e sostituendo } n: \qquad T = \frac{tx}{Q}$$

Abbiamo già osservato che il minimo costo degli ordini lo abbiamo quando ci procuriamo tutto il necessario con un solo ordine e il massimo costo lo avremo se ordiniamo ogni volta la minima quantità possibile. Chiamiamo C_o il costo relativo agli ordini, avremo

C_o il costo complessivo relativo agli ordini;
S_o la spesa per ogni singolo ordine.

Il costo complessivo relativo agli ordini (C_o) dipende dalla spesa per ogni singolo ordine (S_o) e dal numero di ordini (n), il numero di ordini a sua volta dipende dal fabbisogno complessivo (Q) e dalla quantità ordinata in ogni singolo ordine (x):

$$C_o = S_o \cdot n = S_o \cdot \frac{Q}{x}$$

Esempio 3.11: *Una ditta consuma 12 000 risme di carta all'anno. Calcola il numero di ordini che deve effettuare, l'intervallo di tempo tra un'ordine e l'altro e il costo complessivo per gli ordini sapendo che la spesa per un ordine è di 50 €, nei seguenti casi:*
1. $x = 150$ *risme;* *2.* $x = 300$ *risme;* *3.* $x = 500$ *risme.*

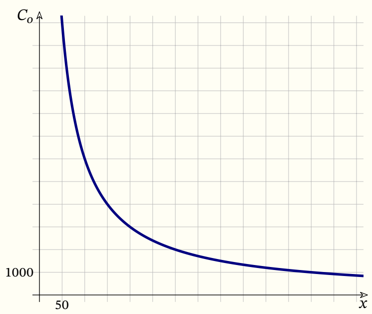
x	$n = \frac{Q}{x}$	$T = \frac{tx}{Q}$ [giorni]	$C_o = S_o \cdot n$ [€]
150	$\frac{12\,000}{150} = 80$	$\frac{365 \cdot 150}{12\,000} \approx 4{,}6 \quad (= 4 \text{ o } 5)$	$50 \cdot 80 = 4000$
300	$\frac{12\,000}{300} = 40$	$\frac{365 \cdot 300}{12\,000} \approx 9{,}1 \quad (= 9 \text{ o } 10)$	$50 \cdot 40 = 2000$
500	$\frac{12\,000}{500} = 24$	$\frac{365 \cdot 500}{12\,000} \approx 15{,}2 \quad (= 15 \text{ o } 16)$	$50 \cdot 24 = 1200$

Si può osservare che C_o è inversamente proporzionale alla quantità ordinata ogni volta. Riportando in un grafico il costo per le ordinazioni in funzione della quantità ordinata, otterremo un ramo di iperbole.

Esempio 3.12: *Riferendoti ai dati dell'esempio precedente, scrivi la funzione che lega il costo complessivo per le ordinazioni (C_o) alla quantità inserita in ogni ordine x. Poi traccia la funzione in un piano cartesiano, magari facendoti aiutare da qualche strumento elettronico.*

La funzione richiesta è: $\quad C_o(x) = S_o \cdot \frac{Q}{x} = 50 \cdot \frac{12\,000}{x} = \frac{600\,000}{x}$

x	C_o
50	12000
100	6000
150	4000
200	3000
250	2400
300	2000
350	1714
400	1500
450	1333
500	1200
550	1091
600	1000
650	923



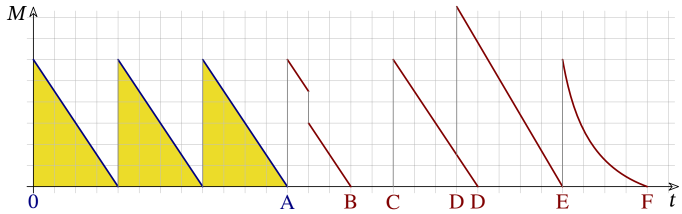
Il magazzino

Abbiamo visto che per ridurre i costi dovuti agli ordini basta ordinare quantità maggiori, ma se mi viene recapitata una grande quantità di materiale, devo trovare un posto dove stoccarlo, devo affittare spazio in un magazzino. Più spazio richiedo al magazzino, più salgono i costi: dobbiamo studiare il costo del magazzino.

Chiamiamo:

C_m il costo complessivo relativo al magazzino;
S_m la spesa nel tempo t per ogni *unità* di prodotto immagazzinato.

Quando viene consegnato un ordine il magazzino riceve la quantità x di materiale. Man mano che il materiale viene usato la quantità presente in magazzino diminuisce. Il grafico seguente rappresenta i possibili andamenti delle quantità immagazzinate. Nel tratto 0 – A tutto procede in modo molto regolare; nel tratto A – B una certa quantità di materie si è deteriorata risultando così non più disponibile; nel tratto C – D l'impresa è rimasta senza materie da lavorare perché la fornitura è arrivata un certo tempo dopo la fine delle scorte; nel tratto D – E il nuovo ordine è arrivato prima della fine delle scorte; nel tratto E – F il consumo non è stato costante.



Allontanandoci dalla realtà, per semplificare il modello, supponiamo che:

1. le materie acquistate non siano deteriorabili nei tempi considerati;
2. il consumo sia uniforme nel tempo;
3. le materie ordinate arrivino esattamente quando sono finite le scorte.

Con queste condizioni la situazione è rappresentata dal tratto 0 – A del grafico precedente.

Il costo del magazzino, C_m, è proporzionale all'area sottesa ai vari segmenti e, nel caso semplice (quello da 0 a A), è facile da calcolare:

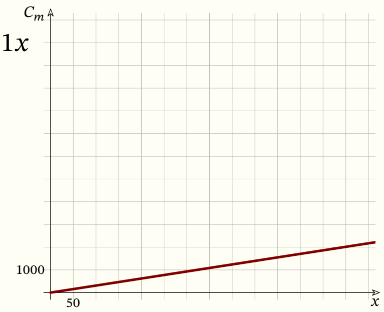
$$C_m(x) = \frac{S_m \cdot x}{2}$$

Si può osservare che C_m è direttamente proporzionale alla quantità ordinata ogni volta. Nella realtà il costo dell'affitto di spazio in un magazzino sarà una funzione più complessa di questa, ma noi siamo andati in cerca di un magazzino che fa un'offerta che ci semplifica i calcoli (offerta che non potevamo rifiutare).

Esempio 3.13: *Riprendendo l'esempio 3.11, calcola la spesa per il magazzino nei tre casi proposti, sapendo che la spesa unitaria per tutto il periodo è di 6,20 €. Poi traccia il grafico della funzione $C_m(x)$.*

$$C_m(x) = \frac{S_m \cdot x}{2} = \frac{6{,}2 \cdot x}{2} = 3{,}1x$$

x	$C_m[€]$
150	315
300	630
500	1050



Ottimizzare i costi

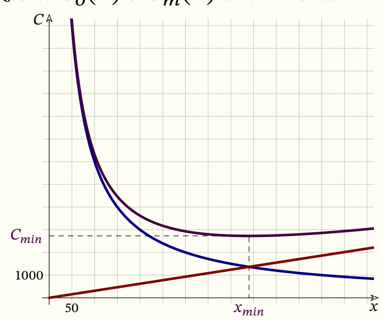
La funzione costo totale è data dalla somma dei due costi:

$$C = C_o + C_m = S_o \cdot \frac{Q}{x} + \frac{S_m \cdot x}{2}$$

Questa funzione all'inizio decresce molto rapidamente a un certo punto incomincia a crescere.

Esempio 3.14: *Riferendoci ai due esempi 3.11 e 3.13, Riporta in un piano cartesiano i grafici delle due funzioni $C_o(x)$ e $C_m(x)$ e la loro somma $C(x)$.*

Si può osservare che grafico del costo complessivo diminuisce fino ad un certo punto, poi riprende a salire: ha un minimo. La quantità x che produce il minimo della funzione $C(x)$ è la quantità da ordinare ogni volta per minimizzare i costi complessivi.



Si può dimostrare che il minimo si trova in corrispondenza dell'intersezione delle due funzioni $C_o(x)$ e $C_m(x)$. L'ascissa del minimo della funzione $C(x)$ ci fornisce la quantità di materia da acquistare in ogni singolo ordine per minimizzare i costi, e la sua ordinata fornisce il costo minimo.

Esempio 3.15: *Riferendoci agli esempi precedenti, calcola la quantità x da richiedere in ogni singolo ordine per minimizzare i costi complessivi $C(x)$. Il costo corrispondente e l'intervallo tra un ordine e l'altro.*

Il valore di x che minimizza i costi è l'ascissa del punto di intersezione delle

due funzioni: $C_o(x)$ *e* $C_m(x)$*:*
$$\begin{cases} y = \dfrac{600\,000}{x} \\ y = 3{,}10x \end{cases}$$

$$\frac{600\,000}{x} - 3{,}1x = 0 \Rightarrow 600\,000 - 3{,}1x^2 = 0 \Rightarrow x = \mp\sqrt{\frac{600\,000}{3{,}1}} \Rightarrow x \approx \mp 440$$

Ovviamente è possibile ordinare solo quantità positive di materiali quindi scartiamo la soluzione negativa. Il corrispondente costo minimo sarà di:

$$C_{min} = 50\frac{12000}{440} + 6{,}20\frac{440}{2} \approx 2728$$

Il numero di ordini in un anno sarà di:

$$n = \frac{Q}{x} = \frac{12000}{440} \approx 27$$

E l'intervallo tra due ordini sarà di:

$$T = \frac{365}{n} = \frac{365}{27} \approx 13{,}5$$

Quindi, per minimizzare i costi di ordini e magazzino, ogni 13/14 giorni la ditta dovrà ordinare 440 risme di carta.

3.4 Esercizi

1. Disegna i seguenti gruppi di rette:
   2. Calcola l'area sottesa alle seguenti funzioni nell'intervallo $[x_0;\ x_1]$ dato.
   3. Studia il segno dei seguenti polinomi.
   4. Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.
   5. Individua quale dei poligoni rappresentato dai seguenti sistemi di disequazioni è finito o infinito, poi calcola le coordinate dei vertici di ogni poligono.

3.1. *TODO Data la funzione* $d(p) = \dfrac{750 - 5p}{25}$ *determina:*

a) *per quali valori di p può essere assunta come una funzione di domanda;*
b) *dopo averne costruito il grafico, determina il valore massimo e minimo assunto dalla funzione;*
c) *la quantità di bene domandata in corrispondenza del prezzo media aritmetica tra prezzo massimo e prezzo minimo;*
d) *il coefficiente di elasticità per una variazione di prezzo da* $p_1 = 100$ *a* $p_2 = 125$ *e la conseguente classificazione della domanda.*

3.2. *TODO La funzione di domanda e di offerta di un certo prodotto sono espresse dalle seguenti equazioni:*

$$d(p) = -2p^2 + 1200 \quad h(p) = -40 + 22p$$

Dopo aver rappresentato le due curve, determina il prezzo di equilibrio e la quantità di merce domandata ed offerta a tale prezzo.

Indice analitico