MATEMATICA LIBERA

INSIEMI NUMERICI

Testo a moduli
per la Scuola Secondaria di *II* grado

Modulo 1: Insiemi numerici

Edizione - 2022

Matematica Libera– Insiemi numerici
Copyright © 2022

Coordinatori del Progetto: Daniele Zambelli.

Autori: Leonardo Aldegheri, Elisabetta Campana, Luciana Formenti, Carlotta Gualtieri, Michele Perini, Maria Antonietta Pollini, Diego Rigo, Nicola Sansonetto, Andrea Sellaroli, Bruno Stecca, Daniele Zambelli.

Hanno Collaborato: Alberto Bicego, Alessandro Canevaro, Alberto Filippini.

Progettazione e Implementazione in LaTeX: Dimitrios Vrettos, Daniele Zambelli.

Collaboratori: Claudio Carboncini, Silvia Cibola, Tiziana Manca, Michele Perini, Andrea Sellaroli, Daniele Zambelli.

Collaborazione, commenti e suggerimenti: Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica Dolce o se vuoi inviare i tuoi commenti e/o suggerimenti scrivi a .

Versione del documento: 10.0.0 del 4 Maggio 2022.
Stampa edizione 2022: maggio 2022.
ISBN

Dati tecnici per l'adozione del libro a scuola
Titolo: Matematica Libera, Insiemi numerici -2022.
Codice ISBN:
Editore:
Anno di edizione: 2022.
Prezzo pdf:
Formato: ebook (pdf).

Indice

1 Numeri naturali

In questo capitolo incontrerai:

- i numeri naturali;
- l'importante strumento matematico costituito dalle funzioni;
- i grafi ad albero;
- le operazioni con i naturali e le loro proprietà;
- le proprietà delle potenze;
- le espressioni con i numeri naturali;
- i numeri primi;
- la divisibilità, i divisori e i multipli.

1.1 L'origine dei numeri

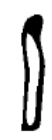
L'origine del sistema dei numeri naturali si perde nella notte dei tempi. Non abbiamo documenti sufficienti per capire come l'uomo li abbia costruiti o scoperti; è possibile che il nostro sistema di numerazione sia nato contemporaneamente al linguaggio stesso della specie umana. Sono stati ritrovati reperti fossili risalenti a più di trentamila anni fa, recanti delle incisioni a distanza regolare. In particolare, è stato ritrovato un osso di babbuino, detto "Osso di Ishango" [1] in quanto è stato rinvenuto presso la città di Ishango nel Congo tra il Nilo e il lago Edoardo, che riporta delle tacche disposte in modo tale da farci pensare che rappresentino dei numeri o dei calcoli. L'osso risale a circa 20 000 anni fa.

Possiamo immaginare che i pastori per contare i capi del proprio gregge, facessero delle tacche su dei bastoni mano a mano che le pecore entravano nel recinto una alla volta: una tacca per ogni pecora. Tuttavia, questo metodo di associazione uno ad uno (una tacca per una pecora) non è efficace per greggi, o gruppi di oggetti, di grandi dimensioni. Si immagini, per esempio, la difficoltà di tracciare cinquecento tacche su un bastone.

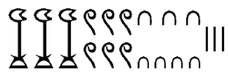
[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Osso_d'Ishango

È possibile allora che, per rappresentare numeri grandi, si siano cominciati a usare simboli specifici che richiamassero alla mente i numeri grandi e che contemporaneamente siano state fissate alcune regole per associare questi simboli.

Sappiamo per certo che circa 6 000 anni fa gli antichi Egizi scrivevano, incidendo sulla pietra, i numeri utilizzando geroglifici per le potenze di 10:

						
1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1

Ripetendo questi simboli è possibile scrivere, per esempio, il numero 3673 così:



I Romani per rappresentare i numeri usavano sette lettere maiuscole: $I = 1$, $V = 5$, $X = 10$, $L = 50$, $C = 100$, $D = 500$, $M = 1000$. Il numero MM rappresenta $1000 + 1000 = 2000$; il numero VI rappresenta $5+1 = 6$, mentre il numero IV rappresenta $5-1 = 4$.

Nel medioevo si diffuse anche in Italia, e poi in Europa, la notazione usata dagli arabi di allora che a loro volta l'avevano appresa dagli abitanti dell'India. Non fu un passaggio facile: le cifre arabe richiesero alcuni secoli per essere accettate dagli europei e soppiantare i simboli romani.

1.2 I numeri naturali

I primi numeri che abbiamo usato sin da bambini per contare gli oggetti o le persone si chiamano *numeri naturali*

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad 10, \quad 11, \quad 12, \quad 13, \quad \ldots$$

L'insieme di tutti questi numeri si indica con la lettera $\mathbb{N}$.

Cosa hanno in comune le dita di una mano, con 5 mele, 5 penne, 5 sedie? Evidentemente il numero 5. Una caratteristica cioè che è comune a tutti i gruppi formati da 5 oggetti. Questa caratteristica può essere vista come un oggetto a sé stante, un oggetto astratto di tipo matematico.

Ma i numeri naturali non servono solo per indicare quanti oggetti ci sono (aspetto *cardinale* del numero), vengono usati anche per rappresentare l'ordine con cui si presentano gli oggetti, (aspetto *ordinale*), l'ordine per esempio con cui i corridori arrivano al traguardo: primo, secondo, terzo, …

Nonostante i numeri naturali e le operazioni su di essi ci vengano insegnati fin da piccoli e nonostante l'umanità li usi da tempi antichissimi, una loro piena comprensione non è semplice, come dimostra il fatto che ancora oggi ci siano dei problemi aperti relativi a questi numeri. Il dibattito su cosa sono i numeri e su cosa si fondano è stato particolarmente animato nei primi decenni del *XX* secolo, quando ne hanno discusso matematici e filosofi come Frege, Peano, Russell, Hilbert e tanti altri. Oggi ci sono diversi punti di vista.

1.3 Cosa sono

I numeri naturali sono alla base dell'aritmetica, tutti gli altri numeri si possono costruire a partire da questi. Tutti noi abbiamo una idea di cosa siano i numeri naturali e, in generale, in questo testo ci riferiremo a questa idea ingenua di numeri naturali.

Ci sono diversi modi per definirli a partire da concetti più primitivi come, ad esempio, gli *insiemi* o da *assiomi*. Di seguito sono presentati gli assiomi di Peano[2] che permettono di definire i numeri naturali a partire da due concetti primitivi e da 5 assiomi , cioè affermazioni su cui siamo d'accordo.

I concetti primitivi per definire i numeri naturali sono:

- lo zero;
- il successore di un numero.

Lo *zero* è il numero che serve per contare gli elementi di un gruppo con il minore numero di oggetti possibile: un gruppo vuoto.

Il *successore* di un numero naturale n è quel numero che viene subito dopo n e che rappresenta il numero di oggetti di un gruppo quando se ne aggiunge uno.

Le seguenti affermazioni possono quindi individuare i numeri naturali:

1. Zero è un numero naturale.
2. Per ogni numero naturale, anche il suo successore è un numero naturale.
3. Numeri diversi hanno successori diversi.
4. Lo zero non è successore di nessun numero naturale.
5. Se una proprietà vale per lo zero e, valendo per un numero naturale qualsiasi, vale anche per il suo successore, allora vale per ogni numero naturale.

In pratica i numeri naturali sono la sequenza:
zero, uno, due, tre, …, centoventitre, centoventiquattro, …

Un modo comodo per esprimere qualunque numero naturale è usare dei segni appositi, le cifre, e un sistema per rappresentarli:
$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots, \quad 123, \quad 124, \dots$

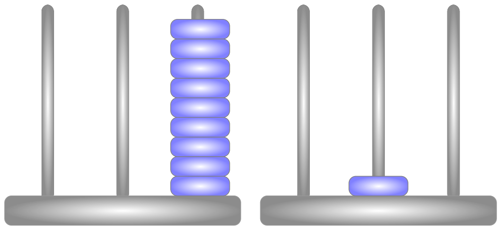
1.4 Il sistema di numerazione decimale posizionale

Il modo di scrivere i numeri dei romani risultava piuttosto complicato sia nella scrittura dei numeri sia nell'esecuzione dei calcoli. Il sistema moderno di scrittura dei numeri fa uso dei soli dieci simboli: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, che vengono detti *cifre* . Un numero può essere rappresentato da una sequenza ordinata di cifre, anche ripetute.

Per rappresentare il numero dieci che segue il 9 non si fa uso di un simbolo diverso ma si scrivono due cifre: il simbolo 1 a sinistra e il simbolo 0 a destra. Per chiarire questo metodo utilizziamo un pallottoliere con aste verticali capaci di contenere fino a 9 dischetti: un'asta vuota rappresenta la cifra zero, aggiungendo dischetti possiamo arrivare alla cifra 9 e così abbiamo riempito tutta un'asta. Se vogliamo aggiungere ancora un dischetto, svuotiamo tutta l'asta e ne mettiamo uno sull'asta più a sinistra. Il numero successore del nove viene così rappresentato da un *uno* seguito da uno *zero*.

[2]Vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Assiomi_di_Peano

I dischetti sull'ultima asta rappresentano il numero 9; un dischetto sulla penultima rappresenta il numero dieci: 10. Un dischetto sulla terzultima rappresentare il numero cento: 100. In questo modo possiamo rappresentare tutti i numeri.



Le potenze di 10 sono importanti nel sistema decimale poiché rappresentano il peso di ciascuna cifra di cui è composto il numero. Nel pallottoliere ciascuna asta indica una potenza di dieci. Il valore di un numero si ottiene moltiplicando ciascuna cifra per il suo peso e sommando i valori ottenuti.

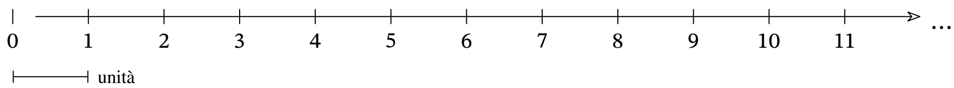
Tre dischetti nella terza asta rappresentano tre centinaia, cioè il numero $3 \cdot 10^2 = 300$. Il numero 479 significa quattro centinaia più sette decine più nove unità: $4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 9$.

Per quanto detto, il sistema di numerazione che usiamo è:

- *decimale* o a base dieci, perché usiamo dieci segni (cifre) per scrivere i numeri;
- *posizionale* perché una stessa cifra assume un peso (valore) diverso a seconda della posizione che occupa.

Rappresentazione geometrica

I numeri naturali possono essere rappresentati su una semiretta: si identifica il numero 0 con l'origine della semiretta, i numeri aumentano allontanandosi dall'origine e si deve scegliere un segmento che rappresenti un passo unitario. Partendo dall'origine, a ogni passo si va al numero successivo.



Ogni numero naturale si costruisce a partire dal numero 0 e passando di volta in volta al numero successivo: 1 è il successore di 0, 2 è il successore di 1, 3 è il successore di 2, etc. Ogni numero naturale ha il successore e ogni numero, a eccezione di 0, ha il precedente. L'insieme $\mathbb{N}$ ha 0 come elemento minimo e non ha un elemento massimo .

1.5 Confronto tra numeri naturali

I numeri rappresentati sulla retta sono sempre più grandi man mano che ci si allontana dall'origine. L'origine e la freccia indicano chiaramente in quale verso i numeri crescono. Noi, in generale disponiamo la semiretta in modo che i numeri crescano da sinistra a destra.

Ogni numero è minore del suo successore. Questa proprietà si può estendere anche al successore del successore e al successore del successore del successore ….

Tra i numeri naturali possiamo individuare una relazione di equivalenza : '*essere uguale* indicata dal simbolo "=". Questa relazione ha le seguenti proprietà:

1. *riflessiva*: $a = a$;
2. *simmetrica*: se $a = b$ allora $b = a$;
3. *transitiva*: se $a = b$ e $b = c$ allora $a = c$;

Tra i numeri naturali possiamo individuare una relazione d'ordine: *essere minore o uguale* indicata dal simbolo "$\leqslant$". Questa relazione ha le seguenti proprietà:

1. *riflessiva*: $a \leqslant a$;
2. *antisimmetrica*: se $a \leqslant b$ allora $b \nleqslant a$;
3. *transitiva*: se $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$ allora $a \leqslant c$;

Tra i numeri naturali possiamo riconoscere le seguenti relazioni d'ordine:

- *disuguaglianza* $\leqslant$ (si legge "minore o uguale di");
- *disuguaglianza stretta* $<$ (si legge "minore di");
- *disuguaglianza* $\geqslant$ (si legge "maggiore o uguale di");
- *disuguaglianza stretta* $>$ (si legge "maggiore di").

Postulato 1.1 (Principio di tricotomia): *Dati due numeri naturali n e m vale sempre una delle seguenti tre relazioni :*

$$n < m, \quad n = m, \quad n > m$$

1.6 Operazioni con i numeri naturali

Possiamo vedere le operazioni matematiche come dei meccanismi, delle regole, che associano ad alcuni oggetti matematici, detti *operandi*, un altro oggetto matematico, che è unico, il *risultato*.

Di seguito riprendiamo rapidamente le prime cinque operazioni aritmetiche nei numeri naturali.

Funzioni

Prima di affrontare le operazioni introduciamo uno dei concetti più importanti nella matematica moderna: il concetto di *funzione*.

Definizione 1.1: *Chiamiamo* funzione *un qualunque procedimento che, a partire da alcuni oggetti che sono gli* argomenti*, ne produce uno che è il* risultato *della funzione.*

Anche le operazioni aritmetiche possono essere viste come particolari funzioni. Sono delle funzioni *binarie* perché hanno due argomenti e, ovviamente, un risultato.

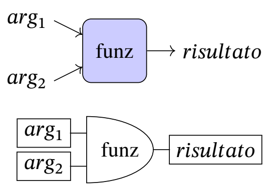
Data l'importanza delle funzioni e il loro uso in molti contesti diversi, vengono anche usati molti modi diversi per rappresentarle. Di seguito ne vediamo alcuni, relativi al caso dell'addizione.

$$risultato = funzione(parametro_1;\ parametro_2)$$

$$somma : (addendo_1;\ addendo_2) \mapsto addendo_1 + addendo_2$$

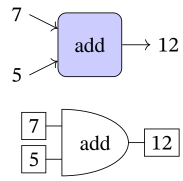
Possono essere usate anche delle rappresentazioni grafiche:

Funzione rappresentata con grafi



Rappresentazioni dell'espressione:

$7 + 5 = 12$



Una funzione può anche essere definita in un linguaggio di programmazione (nel caso seguente usiamo Python):

```
def add(parametro_1, parametro_2):
    return parametro_1 + parametro_2
```

Interpretazione di queste due righe di programma:

"add" è il nome della funzione;

"parametro_1" e "parametro_2" sono i parametri della funzione;

il risultato dell'espressione che segue la parola "return" è il risultato della funzione;

"def" e "return" sono delle parole riservate del linguaggio Python.

Il risultato della funzione può essere visualizzato con la seguente istruzione:

```
print(add(5, 7))
```

"print" è un comando per visualizzare qualcosa sullo schermo;

"5" e "7" sono gli argomenti della funzione.

La funzione "add" ha due *parametri* ("parametro_1" e "parametro_2") e, per eseguirla, dobbiamo passarle due *argomenti* ("5" e "7").

Osservazioni 1.1:

- *Queste prime funzioni che studiamo sono funzioni binarie: richiedono come argomenti due numeri e danno come risultato un numero.*
- *Nell'ambito informatico gli argomenti sono anche detti "input" e il risultato è detto "output" della funzione.*

Proprietà delle operazioni

Prima ancora di affrontare le operazioni aritmetiche con i numeri naturali, vediamo le proprietà delle operazioni in generale. *In generale* vuol dire che ora non stiamo a precisare né di quale insieme numerico parliamo, né di quale operazione. Quindi useremo delle lettere per indicare operandi e risultato mentre, per l'operazione, useremo un simbolo diverso da quelli delle quattro operazioni. Un'operazione che indicheremo con il simbolo $\star$:

1. si dice *legge di composizione interna* se il risultato appartiene allo stesso insieme degli operandi;
2. gode della proprietà *associativa* se per ogni a, b e c: $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$;
3. possiede un *elemento neutro* se esiste un elemento u tale che per ogni a: $a \star u = u \star a = a$

4. possiede un *elemento assorbente* se esiste un elemento z tale che per ogni a: $a \star z = z \star a = z$
5. possiede elemento *inverso* se per ogni elemento a dell'insieme, esiste un elemento a' dell'insieme per cui $a \star a' = a' \star a = u$ dove u è l'elemento neutro;
6. gode della proprietà *commutativa* se per ogni a e b: $a \star b = b \star a$.

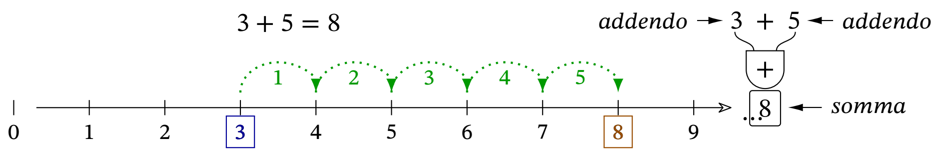
Vediamo ora alcune operazioni con i numeri naturali, le loro proprietà e le strutture algebriche sui naturali.

Addizione in $\mathbb{N}$: $(\mathbb{N};\ +)$

L'addizione è collegata all'operazione concreta di aggiungere gli elementi di un gruppo di oggetti agli elementi di un altro gruppo per poi considerarli riuniti in un unico gruppo.

Definizione 1.2 (Addizione): *Dati due numeri naturali n e m, l'*addizione *associa quel numero s, che si ottiene partendo da n e procedendo verso i* successori *m volte. Si scrive $n + m = s$.*
Gli operandi dell'addizione si chiamano addendi *e il risultato si chiama* somma*.*

Ad esempio: sommare 5 a 3 significa partire da 3 e spostarsi verso il successore per 5 volte.



Funzione addizione

L'addizione tra numeri naturali è una funzione che ha come *argomenti* due numeri naturali e dà come *risultato* un *numero naturale*:

Proprietà dell'addizione

Per come è definita, e dato che il successore di un numero naturale è un numero naturale, la somma di due numeri naturali qualsiasi è *sempre* un numero naturale. Si dice che l'addizione nei numeri naturali presenta le seguenti proprietà:

- è una *legge di composizione interna*;
- *Associativa*: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- *Elemento neutro è 0*: $a + 0 = 0 + a = a$;
- *Commutativa*: $a + b = b + a$.

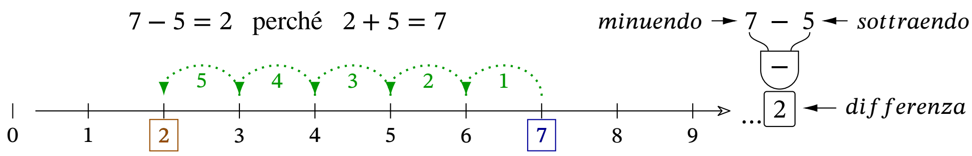
Avendo queste proprietà, la struttura algebrica $(\mathbb{N};\ +)$ viene chiamata *monoide commutativo* (o *abeliano*[3])

Sottrazione in $\mathbb{N}$: $(\mathbb{N};\ -)$

La sottrazione è collegata all'operazione concreta di togliere degli oggetti da un gruppo di oggetti.

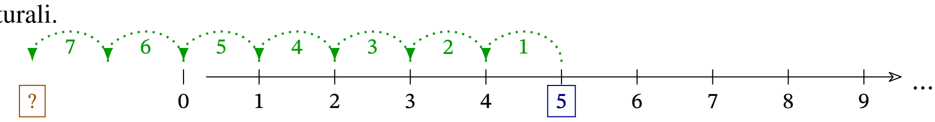
> **Definizione 1.3 (Sottrazione):** *Dati due numeri naturali m e n, la sottrazione associa quel numero naturale d, se esiste, che aggiunto ad n dà come somma m.*
> *Si scrive $m - n = d$.*
> *Il primo operando si chiama* minuendo, *il secondo* sottraendo *e il risultato* differenza.

Ritornando alla rappresentazione dei numeri naturali sulla semiretta orientata, la differenza tra i numeri 7 e 5 si può trovare partendo da 7 e procedendo a ritroso di 5 posizioni.



La sottrazione è l'*operazione inversa* dell'addizione.

Se consideriamo solo numeri naturali non è sempre possibile trovare la differenza tra due numeri. Ad esempio, la differenza tra 5 e 7 non è un numero naturale, infatti se partendo dal 5 andiamo indietro di 7 posizioni usciamo dalla semiretta dei numeri naturali.

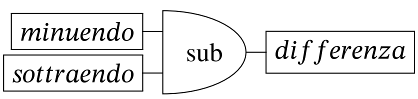


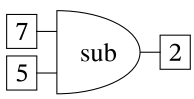
Questo corrisponde al fatto che se ho solo 5 oggetti non ne posso togliere 7!

Si può osservare allora che in $\mathbb{N}$ la sottrazione $a - b$ è possibile solo se $a \geqslant b$.

Funzione sottrazione

Nei naturali la sottrazione è una funzione che ha come *argomenti* due numeri naturali e dà come *risultato* un *numero naturale* solo se il minuendo non è minore del sottraendo:





[3] In onore del grande e sfortunato matematico norvegese Niels Henrik Abel (vedi: https://it.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel).

Osservazioni 1.2:

- *l'ordine degli argomenti è importante:* $sub(7;\ 5) \neq sub(5;\ 7)$*;*
- *è definita solo quando il numero da togliere è minore del numero da diminuire.*

Proprietà della sottrazione

La sottrazione *non* è una *legge di composizione interna* ai numeri naturali, dato che alcune sottrazioni non danno come risultato un numero naturale.

Non è commutativa né associativa e non ha neppure un elemento neutro. Possiamo dire che ha solo l'elemento neutro a destra infatti $a - 0 = a$, ma in generale non si può fare $0 - a$.

Una proprietà interessante della sottrazione, e molto utile nei calcoli, è:

Definizione 1.4 (Proprietà invariantiva della sottrazione): *aggiungendo o togliendo ad entrambi i termini di una sottrazione la stessa quantità, c, la differenza non cambia.*

$$a - b = (a - c) - (b - c) = (a + c) - (b + c)$$

Moltiplicazione in $\mathbb{N}$: $(\mathbb{N};\ \times)$

La moltiplicazione è legata all'azione di contare oggetti disposti in uno schieramento rettangolare.

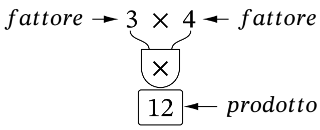
Definizione 1.5 (Moltiplicazione): *Dati due numeri naturali m, n, l'operazione di* moltiplicazione *associa il numero p che si ottiene aggiungendo a 0 n addendi uguali a m:*

$$m \times n = 0 + \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n\ volte} = p$$

Gli operandi della moltiplicazione si chiamano fattori *e il risultato si chiama* prodotto.

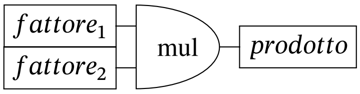
Ad esempio: moltiplicare 3 per 4 volte significa partire da 0 e aggiungere 3 per 4 volte.

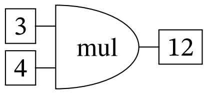
$$3 \cdot 4 = 0 + \underbrace{3 + 3 + 3 + 3}_{4\ \text{volte}} = 12$$



Funzione moltiplicazione

La moltiplicazione tra numeri naturali è una funzione che ha come *argomenti* due numeri naturali e dà come *risultato* un *numero naturale*:





Proprietà della moltiplicazione

Dato che per eseguire una moltiplicazione ripeto delle addizioni, anche il prodotto di due numeri naturali qualsiasi è sempre un numero naturale. Si dice che la moltiplicazione è una *legge di composizione interna ai naturali* e presenta le seguenti proprietà:

- *Associativa*: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- *Elemento neutro* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- *Elemento assorbente* $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- *Commutativa*: $a \cdot b = b \cdot a$

Avendo queste proprietà, la struttura algebrica $(\mathbb{N};\ \times)$ viene chiamata *monoide commutativo* (o *abeliano*).

Un'altra importante proprietà che utilizzeremo spesso anche in seguito è:

Postulato 1.2 (Principio di annullamento del prodotto): *il prodotto di due o più numeri naturali si annulla se e solo se almeno uno dei fattori è nullo.*

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \textit{oppure} \quad b = 0$$

Questa legge dice che se il risultato di una moltiplicazione è zero di sicuro almeno uno dei fattori deve essere zero. Attenzione: questa proprietà non vale per tutti gli insiemi numerici in cui è definita la moltiplicazione.

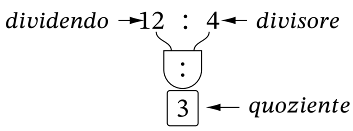
Divisione in $\mathbb{N}$: $(\mathbb{N};\ :)$

La divisione è collegata all'operazione concreta di dividere una certa quantità di oggetti in gruppi con lo stesso numero di oggetti.

Definizione 1.6: *Dati due numeri naturali m e n, con $n \neq 0$, la divisione associa quel numero naturale q, se esiste, che moltiplicato per n dà come prodotto m.*
Si scrive $m : n = q$.
Il primo operando si chiama dividendo *e il secondo* divisore*, il risultato si dice* quoziente esatto.

Ad esempio: dividere 12 per 4 significa trovare quante volte il numero 4 è contenuto nel numero 12.[4]

$$12 : 4 = 3 \text{ perché } 3 \cdot 4 = 12$$



Non sempre si può effettuare la divisione nei numeri naturali ad esempio: $10 : 4 =$ non è un numero naturale. Se esiste il quoziente esatto tra i numeri m e n, si dice che:

[4]Si può anche pensare la divisione in $\mathbb{N}$ come una sottrazione ripetuta finché si può: si prende 12 e si sottrae 4, poi ancora 4 ecc, finché si riesce a sottrarre; infine si contano le sottrazioni eseguite.

- n è *divisore* di m;
- m è *divisibile* per n;
- m è *multiplo* di n

Esempio 1.1: *Alcuni esempi:*

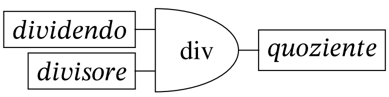
1. *20 è divisibile per 4 perché* $20 : 4 = 5$; *4 è un divisore di 20; 20 è un multiplo di 4.*
2. *7 è divisore di 35 perché* $35 : 7 = 5$; *35 è divisibile per 7; 35 è un multiplo di 7.*
3. *6 è multiplo di 3 perché* $6 = 2 \times 3$; *6 è divisibile per 3; 3 è un divisore di 6.*
4. *5 non è multiplo di 3; non esiste un numero naturale che moltiplicato per 3 dia 5.*

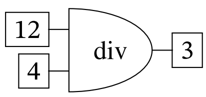
Osservazioni 1.3 (Divisione per 0): *La divisione per zero non è definita.*

- *nella divisione* $n : 0$ *con* $n \neq 0$, *non c'è nessun numero che moltiplicato per 0 ci possa dare un dividendo diverso da zero; questa divisione è* impossibile.
- *nella divisione* $0 : 0$ *un qualsiasi numero è adatto come quoziente, infatti qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0 come prodotto; questa divisione è* indeterminata.

Funzione divisione

La divisione è una funzione che ha come *argomento* una *coppia ordinata* di numeri naturali e dà come *risultato* un *numero naturale*:





Osservazioni 1.4:

- *l'ordine degli argomenti è importante:* $div(12; 4) \neq div(4; 12)$;
- *è definita solo quando il numero da dividere è un multiplo del numero che divide.*

Proprietà della divisione

Dato che non dà sempre un risultato, la divisione non è una *legge di composizione interna* ai numeri naturali.

Non è commutativa né associativa e non ha neppure un elemento neutro. Possiamo dire che ha solo l'elemento neutro a destra infatti $a : 1 = a$, ma in generale non si può fare $1 : a$.

L'unica proprietà interessante della divisione è la proprietà

- *Invariantiva*: $a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c) = (a : c) : (b : c)$ se $c \neq 0$

Definizione 1.7 (Proprietà invariantiva della divisione): *Moltiplicando o dividendo entrambi i termini di una divisione per la stessa quantità, **diversa da zero**, il quoziente non cambia*[a].

[a] Da notare la differenza con la Proprietà invariantiva della sottrazione!

Proprietà distributiva

Oltre alle proprietà valide per le singole operazioni, ce n'è una che riguarda due operazioni contemporaneamente, è la proprietà *distributiva*.

Proprietà distributiva della moltiplicazione

Rispetto all'addizione Moltiplicare il risultato dell'addizione di più numeri per un altro numero dà lo stesso risultato che moltiplicare ogni addendo per il fattore e addizionare i prodotti ottenuti. Questa proprietà vale sia se la somma è a destra sia se è a sinistra.

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

$3{\cdot}(2{+}4) = 3{\cdot}6 = 18$; $3{\cdot}(2{+}4) = 3{\cdot}2{+}3{\cdot}4 = 6{+}12 = 18$
$(3+5) \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$; $(3+5) \cdot 4 = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 12 + 20 = 32$

Rispetto alla sottrazione In maniera analoga:

$a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$
$(a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$

$5 \cdot (7-4) = 5 \cdot 3 = 15$; $5 \cdot (7-4) = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 4 = 35 - 20 = 15$
$(9{-}4){\cdot}2 = 5{\cdot}2 = 10$; $(9{-}4){\cdot}2 = 9{\cdot}2{-}4{\cdot}2 = 18{-}8 = 10$

Avendo queste proprietà, la struttura algebrica $(\mathbb{N};\ +;\ \times)$ viene chiamata *semianello commutativo* (o *abeliano*).

Proprietà distributiva della divisione

Rispetto all'addizione Solo se le somme sono a sinistra:

$(a+b) : c = a : c + b : c$

$(20+10) : 5 = 30 : 5 = 6$
$(20+10) : 5 = 20 : 5 + 10 : 5 = 4 + 2 = 6$

Verifichiamo con un esempio che non vale la proprietà distributiva se le somme si trovano a destra: $120 : (3+5)$. Infatti eseguendo prima l'operazione tra parentesi si ottiene correttamente $120 : 8 = 15$. Se si prova ad applicare la proprietà distributiva si ottiene $120 : 3 + 120 : 5 = 40 + 24 = 64$. Il risultato corretto è solo il *primo*.

Rispetto alla sottrazione Solo se la sottrazione è a sinistra:

$(a-b) : c = a : c - b : c$

$(24-18) : 6 = 6 : 6 = 1$
$(24-18) : 6 = 24 : 6 - 18 : 6 = 4 - 3 = 1$

Se, però, la sottrazione è a destra:

$120 : (5{-}3) = 120 : 2 = 60 \neq 120 : 5{-}120 : 3 = 24{-}40 =$ che non ha soluzione in $\mathbb{N}$

Osservazione 1.5: *Nonostante la grande utilità dei numeri naturali e il fascino dei problemi presenti nei naturali che non sono ancora risolti, una struttura a semianello è piuttosto debole: non permette di risolvere neppure equazioni del tipo* $ax \mp b = 0$.

Potenza in $\mathbb{N}$: $(\mathbb{N};\ \uparrow)$

La *potenza* di un numero naturale è una moltiplicazione che ha tutti i fattori uguali.

Definizione 1.8 (Potenza): *Dati due numeri naturali* b *e* e*,* non entrambi nulli*, l'operazione di* potenza *associa un terzo numero* p *che si ottiene moltiplicando 1 per e fattori uguali a b:*

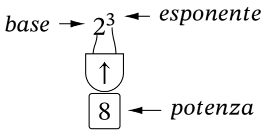
Se $b = 0$ *e* $e = 0$ $\quad b^e$ *non è definita* $\qquad$ *altrimenti* $b^e = 1 \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{e \text{ volte}} = p$

Gli operandi si chiamano base *e* esponente *mentre il risultato si chiama* potenza.

esponente

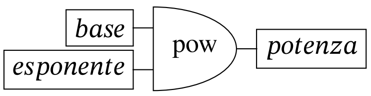
$$2^3 = 1 \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3 \text{ volte}} = 8$$

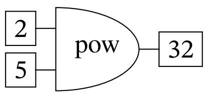
base potenza



Funzione potenza

La potenza è una funzione che ha come *argomenti due numeri naturali* e dà come *risultato* un *numero naturale*:





Proprietà delle potenze

Nei numeri naturali, la potenza è una legge di composizione interna ma non è né associativa, né commutativa. Presenta comunque cinque proprietà importanti perché verranno utilizzate all'interno di altri argomenti che incontreremo in seguito come, ad esempio, nel calcolo letterale e nello studio di funzioni esponenziali e logaritmiche.

1. Il prodotto di più potenze con la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

$\boxed{a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}}$ $\qquad 7^5 \cdot 7^6 \cdot 7^3 = 7^{5+6+3} = 7^{14}$ $\qquad$ infatti:

$$a^m \cdot a^n = (1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ volte}}) \cdot (1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}) \cdot (1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p \text{ volte}}) = (1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{m+n+p \text{ volte}}) = a^{m+n+p}$$

2. Il quoziente di due potenze con la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}}$ $\quad 4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2$ $\quad$ infatti:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1 \cdot \overbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ volte}}}{1 \cdot \underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{n \text{ volte}}} = a^{m-n}$$

3. La potenza di una potenza è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$ $\quad (6^2)^5 = 6^{2 \cdot 5} = 6^{10}$ $\quad$ infatti:

$$(a^m)^n = 1 \cdot \overbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}^{n \text{ volte}} = \overbrace{(1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ volte}}) \cdot (1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ volte}}) \cdot \ldots \cdot (1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ volte}})}^{n \text{ volte}} = a^{m \cdot n}$$

4. Il prodotto di più potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$\boxed{a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n}$ $\quad 2^8 \cdot 5^8 \cdot 3^8 = (2 \cdot 5 \cdot 3)^8$ $\quad$ infatti:

$$a^n \cdot b^n = (1 \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}) \cdot (1 \cdot \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ volte}}) \cdot (1 \cdot \underbrace{c \cdot \ldots \cdot c}_{n \text{ volte}}) = 1 \cdot \underbrace{(a \cdot b \cdot c) \cdot (a \cdot b \cdot c) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b \cdot c)}_{n \text{ volte}} = (a \cdot b \cdot c)^n$$

5. Il quoziente di due potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$\boxed{a^n : b^n = (a : b)^n}$ $\quad 6^4 : 3^4 = (6 : 3)^4$ $\quad$ infatti:

$$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \frac{1 \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ volte}}}{1 \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ volte}}} = 1 \cdot \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ volte}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Si può vedere come i casi particolari delle potenze con esponente uguale a 0 e uguale a 1 siano in accordo con le proprietà delle potenze.

$a^0 = a^{n-n} = a^n : a^n = 1$ $\qquad a^1 = a^{n-(n-1)} = a^n : a^{(n-1)} = a$

es. : $4^0 = 4^{3-3} = 4^3 : 4^3 = 64 : 64 = 1$ $\qquad$ *es.* : $8^1 = 8^{4-3} = \dfrac{\cancel{8} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8} \cdot 8}{\cancel{8} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8}} = 8$

Osservazione 1.6: *Alla potenza* 0^0 *non si assegna alcun valore perché applicando la definizione di* a^0 *si dovrebbe ottenere 1; applicando la definizione* 0^a *si dovrebbe ottenere 0. Nonostante ciò, in molti linguaggi di programmazione* 0^0 *dà per risultato 1.*

Operazioni inverse

L'operazione inversa di una certa operazione è l'operazione che permette di calcolare uno degli operandi conoscendo l'altro operando e il risultato. Poiché le operazioni aritmetiche sono funzioni binarie, dobbiamo considerare 2 operazioni inverse, una per trovare il primo operando e una per trovare il secondo.

Esempio 1.2: *Al posto dei puntini scrivi il simbolo dell'operazione mancante.*

	Operazione	*Op. inversa 1*	*Op. inversa 2*
1.	$5 + 3 = 8$	$5 = 8\ \dots\ 3$	$3 = 8\ \dots\ 5$
2.	$9 - 2 = 7$	$9 = 7\ \dots\ 2$	$2 = 9\ \dots\ 7$
3.	$3 \cdot 2 = 6$	$3 = 6\ \dots\ 2$	$2 = 6\ \dots\ 3$
7.	$8 : 4 = 2$	$8 = 2\ \dots\ 4$	$4 = 8\ \dots\ 2$
9.	$3^4 = 81$	$3 = \dots 81$	$4 = \dots\dots 81$

Possiamo osservare che nel caso delle operazioni commutative, le due operazioni inverse coincidono. Riassumiamo ora le cinque operazioni e le loro inverse facendo riferimento all'esempio 1.2.

Addizione: ha un'unica operazione inversa: la *sottrazione* (vedi punti 1 e 2).

Sottrazione: ha due operazioni inverse: l'*addizione*, per calcolare il *minuendo* e la *sottrazione* per calcolare il *sottraendo* (punti 3 e 4).
$min - sott = diff \quad \Leftrightarrow \quad min = diff + sott \quad \Leftrightarrow \quad sott = min - diff.$

Moltiplicazione: ha un'unica operazione inversa: la *divisione* (vedi punti 5 e 6).

Divisione: ha due operazioni inverse: la *moltiplicazione* per calcolare il *dividendo* e la *divisione* per calcolare il *divisore* (vedi punti 7 e 8);
$divid : divis = quoz \quad \Leftrightarrow \quad divid = quoz \cdot divis \quad \Leftrightarrow \quad divis = divd : quoz.$

Potenza: ha due operazioni inverse: la *radice* per calcolare la *base* e il *logaritmo* per calcolare l'*esponente* (vedi punti 9 e 10).
$base^{esp} = pot \quad \Leftrightarrow \quad base = \sqrt[esp]{pot} \quad \Leftrightarrow \quad esp = \log_{base} pot.$

Tabella dei nomi e simboli

Operazione	1° operando	2° operando	risultato	simboli
addizione	addendo	addendo	somma	$+$
sottrazione	minuendo	sottraendo	differenza	$-$
moltiplicazione	fattore	fattore	prodotto	$\cdot$; $\times$; $*$
divisione	dividendo	divisore	quoziente	$:$; $\div$; $/$; $\frac{x}{y}$
potenza	base	esponente	potenza	x^y; ^ ; $\uparrow$; $**$
radice	radicando	indice	radice	$\sqrt[y]{x}$
logaritmo	base	argomento	logaritmo	$\log_x y$

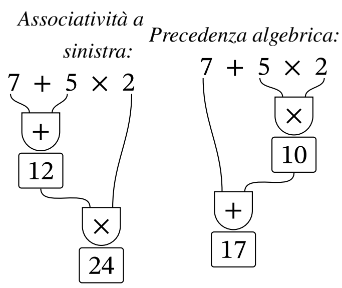
1.7 Espressioni numeriche

Spesso in matematica abbiamo a che fare con più operazioni combinate assieme. In questo caso parliamo di espressioni.

Definizione 1.9: *Un'espressione aritmetica è un modo per rappresentare una successione di operazioni.*

Nel linguaggio comune alcune frasi possono risultare ambigue, per esempio: «La vecchia porta la sbarra». Anche nella matematica, quando abbiamo più operazioni da eseguire, dobbiamo chiarire l'ordine con cui si devono eseguire le operazioni.

Per esempio, l'espressione $7 + 5 \times 2$ può valere 24 oppure 17, infatti: se eseguiamo le operazioni da sinistra verso destra otteniamo un risultato, se eseguiamo prima la moltiplicazione ne otteniamo un altro. La regola più semplice sarebbe "eseguire da sinistra a destra", ma i matematici hanno scoperto che risulta più comodo eseguire prima le moltiplicazioni e dopo le addizioni.



Osservazione 1.7: *Alcune calcolatrici, quelle "aritmetiche" svolgono le operazioni man mano che sono inserite, si dice che applicano* l'associatività a sinistra. *Altre, le calcolatrici "scientifiche" seguono le regole dell'algebra. Esegui la seguente sequenza di operazioni sulla tua calcolatrice (le barre verticali separano i diversi tasti da premere):*

$$| 7 | + | 5 | \times | 2 | = |$$

Osserva il risultato e confrontalo poi con quello ottenuto dai tuoi compagni. Diverse calcolatrici possono fornire risultati diversi (mai fidarsi delle macchine).

La precedenza algebrica prevede che:

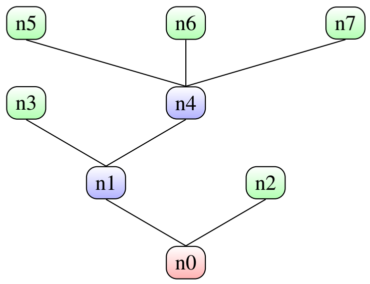
1. in una espressione senza parentesi si svolgono *prima le potenze*, *poi moltiplicazioni e divisioni*, *infine addizioni e sottrazioni*;
2. le operazioni con la stessa precedenza si svolgono da sinistra verso destra;
3. se ci sono parentesi, si svolgono prima le espressioni nelle parentesi più interne.

Soluzione con grafo ad albero

I grafi sono disegni formati da punti collegati tra loro da linee. I grafi ad albero sono dei particolari grafi.

Definizione 1.10 (Grafo ad albero): *Un* grafo ad albero *è un disegno formato da punti detti* nodi *collegati tra loro da linee dette* rami *dove c'è un solo modo per andare da un nodo ad un altro senza ripassare su un ramo.*

In un grafo ad albero si può scegliere un nodo come nodo iniziale, questo nodo si chiama *radice* la radice è un nodo da cui partono dei rami, a cui non arriva alcun ramo. I nodi da cui non parte alcun ramo si chiamano *foglie*.
Nell'esempio a fianco, il nodo *n0* è la radice, i nodi *n2*, *n3*, *n5*, *n6* e *n7* sono le foglie, *n1* e *n4* sono nodi intermedi o semplicemente nodi.



Useremo grafi ad albero per risolvere le espressioni: gli operandi sono le foglie dell'albero, il risultato è la radice. Il movimento, in questo caso, va dalle foglie alla radice (come la linfa discendente. Costruiamo il grafo tenendo conto delle seguenti indicazioni:

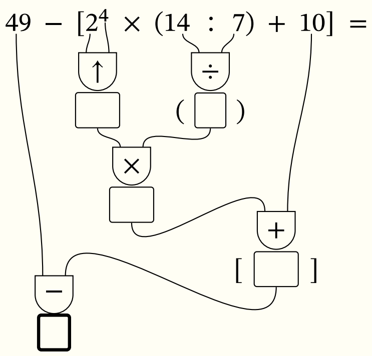
Procedura 1.1: *Per risolvere un'espressione usando un grafo:*

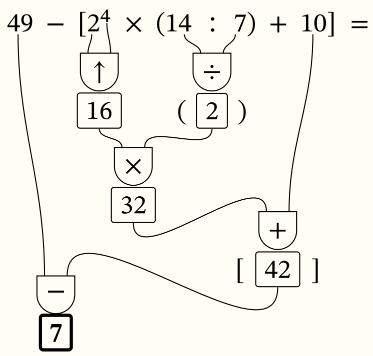
1. *in ogni nodo viene riportata l'operazione eseguita e il risultato;*
2. *costruiamo l'albero disegnando ogni nodo esattamente sotto l'operazione corrispondente;*
3. *disegniamo le parentesi attorno al nodo che contiene il risultato di tutta un'espressione racchiusa tra parentesi.*

Esempio 1.3: $49 - [2^4 \times (14 : 7) + 10] =$

Prima realizziamo il grafo ad albero vuoto, ponendo attenzione alla precedenza delle operazioni.

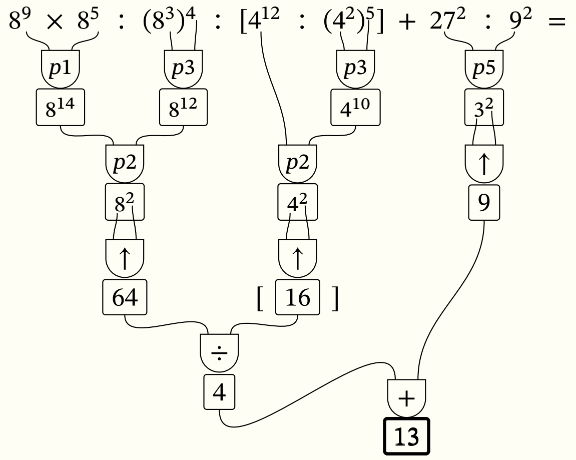
Poi eseguiamo le operazioni e scriviamo i risultati negli appositi spazi.





Esempio 1.4: $8^9 \times 8^5 : (8^3)^4 : [4^{12} : (4^2)^5] + 27^2 : 9^2 =$

Se per risolvere un'espressione dobbiamo utilizzare le proprietà delle potenze, al posto del simbolo di operazione scriveremo le sigle "p1", "p2", …



Metodo sequenziale

In alcuni casi può non essere comodo, o praticabile, l'uso di un grafo ad albero per risolvere espressioni. Vediamo allora il metodo sequenziale che prevede di copiare tutta o in parte l'espressione rendendola via via più semplice. Possiamo applicare le seguenti indicazioni:

Procedura 1.2: *Per risolvere un'espressione in modo sequenziale:*

1. *scorriamo tutta l'espressione da sinistra a destra e sottolineiamo tutte le operazioni che si possono eseguire;*
2. *riscriviamo l'espressione sostituendo, alle operazioni sottolineate, i loro risultati.*

Partiamo da una nuova espressione:

$2 + 6 \times 2 \div \left[(4-2) \times 3^2 - 3 \times 5\right] + \left(5^2 + 2^3\right) \div 3 =$

Scorrendo l'espressione vediamo che l'operazione $2 + 6$ è seguita da una moltiplicazione; poiché la moltiplicazione ha la precedenza sull'addizione, non possiamo eseguire $2+6$. La prossima espressione che incontriamo è 6×2 dato che è seguita da una divisione possiamo eseguirla e quindi la sottolineiamo. Procediamo così sottolineando tutte le operazioni che possiamo eseguire rispettando le precedenze algebriche:

Sottolineo: $2 + \underline{6 \times 2} \div \left[\underline{(4-2)} \times \underline{3^2} - \underline{3 \times 5}\right] + \left(\underline{5^2} + \underline{2^3}\right) \div 3 =$

Ricopiamo l'espressione sostituendo al posto delle operazioni sottolineate il loro risultato:

Eseguo: $= 2 + 12 \div [2 \times 9 - 15] + (25 + 8) \div 3 =$

Otteniamo così un'espressione a cui applicare nuovamente i due passi precedenti fino ad averla ridotta ad un numero.

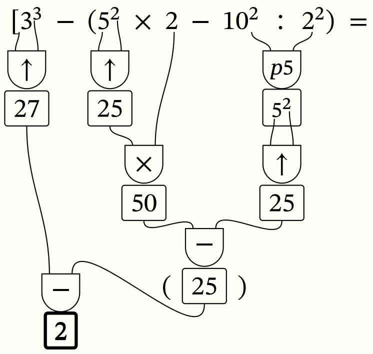
$$\begin{aligned}
\text{Sottolineo:}\quad & = 2 + 12 \div \left[\underline{2 \times 9} - 15\right] + \underline{(25 + 8)} \div 3 = \\
\text{Eseguo:}\quad & = 2 + 12 \div [18 - 15] + 33 \div 3 = \\
\text{Sottolineo:}\quad & = 2 + 12 \div \underline{[18 - 15]} + \underline{33 \div 3} = \\
\text{Eseguo:}\quad & = 2 + 12 \div 3 + 11 = \\
\text{Sottolineo:}\quad & = 2 + \underline{12 \div 3} + 11 = \\
\text{Eseguo:}\quad & = 2 + 4 + 11 = \\
\text{Sottolineo:}\quad & = \underline{2 + 4} + 11 = \\
\text{Eseguo:}\quad & = 6 + 11 = 17
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio, essendo rimasta una sola operazione, è inutile sottolinearla. Avremmo anche potuto risolvere con un passaggio in meno calcolando assieme le due addizioni:

$= 2 + 4 + 11 = 17$

Esempio 1.5: *Possiamo confrontare i due metodi applicati alla stessa espressione:*

Con un albero:



Con il metodo sequenziale:

$$\begin{aligned}
& \underline{3^3} - \left(\underline{5^2} \times 2 - \underline{10^2 : 2^2}\right) = \\
& = 27 - \left(\underline{25 \times 2} - \underline{5^2}\right) = \\
& = 27 - \left(\underline{50 - 25}\right) = \\
& = \underline{27 - 25} = \\
& = 2
\end{aligned}$$

1.8 Espressioni con un buco

A volte potrà succedere che, nell'espressione, manchi un numero. Conoscendo il risultato possiamo trovare il numero mancante.

Soluzione con grafo ad albero

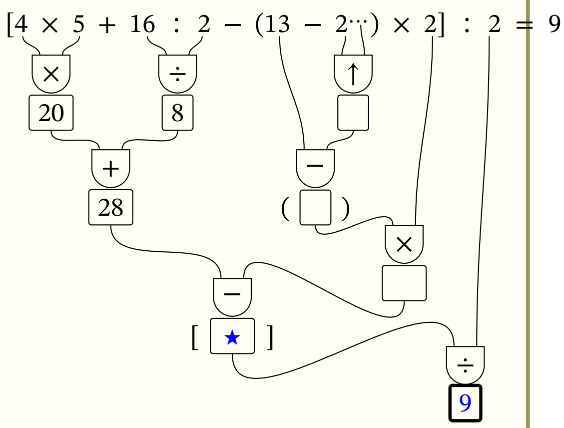
Procedura 1.3: *Per trovare l'operando mancante usando il grafo ad albero:*

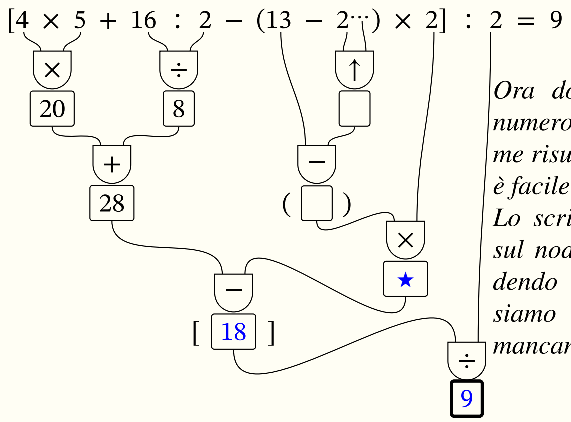
1. *costruiamo il grafo risolutivo eseguendo tutte le operazioni possibili;*
2. *con un colore diverso scriviamo il risultato nella radice e completiamo il grafo risalendo fino al numero mancante.*

È più difficile da immaginare che da fare…vedi l'esempio.

Esempio 1.6: *Nella seguente espressione manca un esponente:*
$[4 \times 5 + 16 : 2 - (13 - 2^{\cdots}) \times 2] : 2 = 9$

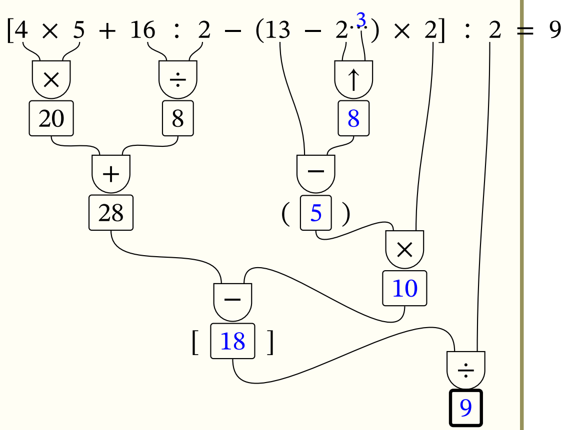
Costruiamo il grafo risolutivo eseguendo tutte le operazioni possibili. Usando un colore diverso, scriviamo nella radice il risultato dell'espressione. Ora poniamo attenzione al nodo vuoto che precede il risultato, il nodo contrassegnato dalla stella. Dobbiamo trovare il numero che diviso per 2 dia come risultato 9. È facile: il numero cercato è 18. Scriviamo allora 18 in questo nodo e poniamo l'attenzione a quello che lo precede.



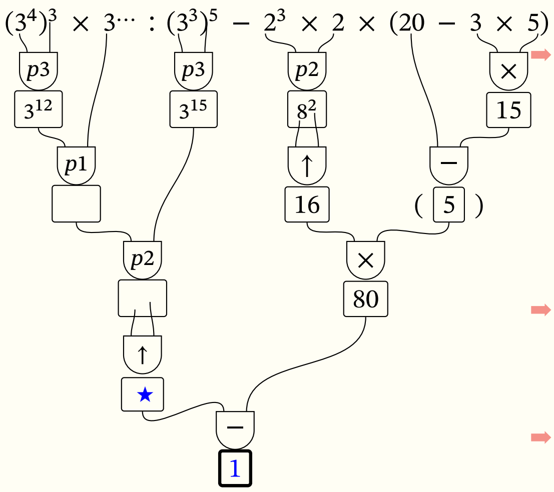


Ora dobbiamo trovare quel numero che tolto da 28 dia come risultato 18. Anche questo è facile da trovare: è 10.
Lo scriviamo e ci spostiamo sul nodo precedente. Procedendo in questo modo possiamo risalire fino al dato mancante.

Il numero che moltiplicato per 2 *dà* 10 *è* 5.
Partendo da 13 *per ottenere* 5 *devo togliere* 8.
Infine, l'esponente da dare a 2 *per ottenere* 8 *è* 3.



Esempio 1.7: *Se c'è un "buco" in una espressione da risolvere con le proprietà delle potenze, si procede allo stesso modo:*
$(3^4)^3 \times 3^{\cdots} : (3^3)^5 - 2^3 \times 2 \times (20 - 3 \times 5) = 1$
Costruiamo il grafo risolutivo eseguendo tutte le operazioni possibili. Rimangono vuoti tutti i nodi che collegano la radice all'elemento mancante. Usando un colore diverso, a partire dalla radice, completiamo il grafo. Scriviamo nella radice il risultato dell'espressione, e poniamo attenzione al nodo vuoto che lo precede.



- *questo numero meno 80 deve dare come risultato 1: il numero cercato è 81;*
- *nel nodo precedente: qui ci va una potenza che deve dare come risultato 81, potrebbe essere* 9^2 *o* 3^4*, ma dato che sopra posso usare le proprietà delle potenze con base 3, conviene usare* 3^4*;*
- *nel nodo precedente: questo esponente meno 15 deve dare come risultato 4, l'esponente qui deve essere 19;*
- *e infine: 12 sommato a questo esponente deve dare come risultato 19: il valore mancante è quindi: 7.*

Soluzione sequenziale

Procedura 1.4: *Per trovare l'operando mancante usando il metodo sequenziale:*

1. *risolviamo l'espressione lasciando il buco ogni volta che dobbiamo eseguire un'operazione tra un numero e un buco;*
2. *con un colore diverso scriviamo il risultato dopo l'ultima operazione e risaliamo dalla soluzione al dato mancante.*

Esempio 1.8: $[4 \times 5 + 16 \div 2 - (13 - 2^{\cdots}) \times 2] \div 2 = 9$

Sottolineiamo le operazioni che dobbiamo eseguire, sostituiamo le operazioni sottolineate con il loro risultato o con un buco, poi risaliamo riempiendo i buchi:

- *il numero che diviso per 2 dà 9 è 18;*
- *il numero che tolto da 28 dà 18 è 10;*
- *il numero che moltiplicato per 2 dà 10 è 5;*
- *il numero che tolto da 13 dà 5 è 8;*
- *l'esponente da dare a 2 per ottenere 8 è 3.*

$\left[\underline{4 \times 5} + \underline{16 \div 2} - \left(13 - \underline{2^{\cdots}}\right) \times 2\right] \div 2 = 9$

$\left[\underline{20 + 8} - \underline{(13 - \ldots)} \times 2\right] \div 2 = 9$

$\left[28 - \underline{\ldots \times 2}\right] \div 2 = 9$

$\underline{[28 - \ldots]} \div 2 = 9$

$\underline{\ldots \div 2} = 9$

Esempio 1.9: $\left(3^4\right)^3 \cdot 3^{\cdots} \div \left(3^3\right)^5 - 2^3 \cdot 2 \cdot (20 - 3 \cdot 5) = 1$

Qui possiamo applicare le proprietà delle potenze:

$\underline{\left(3^4\right)^3} \cdot 3^{\cdots} \div \underline{\left(3^3\right)^5} - \underline{2^3 \cdot 2} \cdot \left(20 - \underline{3 \cdot 5}\right) =$

$\underline{3^{12} \cdot 3^{\cdots}} \div 3^{15} - \underline{2^4} \cdot \underline{(20 - 15)} =$

$\underline{3^{\cdots} \div 3^{15}} - \underline{16 \cdot 5} =$

$\underline{3^{\cdots}} - 80 =$

$\underline{\ldots - 80} = 1$

La risalita non dovrebbe creare problemi.

1.9 Divisibilità e numeri primi

Quoziente intero e resto

La divisione esatta nei numeri naturali, m e n, non è sempre possibile: si può fare solo se m è multiplo di n. Con i numeri naturali però è sempre possibile eseguire la divisione con il resto. La *divisione con resto* è una funzione che dà due risultati: il *quoziente* e il *resto*. Questa è una funzione che ha due argomenti e per risultato una coppia ordinata di numeri.

Definizione 1.11: *Dati due numeri naturali m e n, con $n \neq 0$, esistono due numeri q e r con $0 \leqslant r < n$ tali che:*

$$m = n \cdot q + r$$

q si dice quoziente *e r si dice* resto *della divisione.*

Esempio 1.10: $25 : 7$

Nella divisione con resto tra 25 e 7 si ha quoziente 3 (infatti $7 \times 3 = 21$, mentre $7 \times 4 = 28$ supera il dividendo) e resto 4 (infatti $3{\times}7{+}4 = 25$).

$$\begin{array}{r|l} \textit{dividendo} \longrightarrow 25 & 7 \longleftarrow \textit{divisore} \\ \cline{2-2} 21 & 3 \longleftarrow \textit{quoziente} \\ \cline{1-1} \textit{resto} \longrightarrow 4 & \end{array}$$

Esempio 1.11: *Alcune semplici divisioni con il resto:*

- $0 : 2 =$ *quoziente = 0 e resto = 0*
- $3 : 0 =$ *Non Definita*
- $2 : 7 =$ *quoziente = 0 e resto = 2*
- $7 : 2 =$ *quoziente = 3 e resto = 1*

Un'operazione che dà due risultati a volte è scomoda quindi i matematici hanno ricavato, dalla divisione con resto, due nuove operazioni: la *divisione intera* e il *resto modulo* o *modulo* .

Definizione 1.12: *Dati due numeri naturali m e n, con $n \neq 0$, la* divisione intera m div n *è l'operazione che dà il più grande numero naturale q (il quoziente) per il quale si ha*

$$q \times n \leq m$$

Esempio 1.12: *Alcune semplici divisioni intere:*

- $0 \text{ div } 5 = 0$
- $9 \text{ div } 2 = 4$
- $3 \text{ div } 5 = 0$
- $3 \text{ div } 0 =$ *Non Definita*

Definizione 1.13: *Dati due numeri naturali m e n, con $n \neq 0$, l'operazione che restituisce il resto della divisione intera tra m e n si chiama* modulo *di m rispetto a n e viene indicata con m mod n.*

Esempio 1.13: *Alcuni esempi di resto delle divisioni:*

- $3 \bmod 0 =$ *non def.*
- $0 \bmod 5 = 0$
- $9 \bmod 5 = 4$
- $10 \bmod 5 = 0$
- $3 \bmod 5 = 3$
- $11 \bmod 5 = 1$

Algoritmo della divisione in $\mathbb{N}$

Ripassiamo l'algoritmo della divisione tra numeri naturali; questo algoritmo risulterà particolarmente utile nel seguito.

passo 1

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
 & \mathtt{M} & \mathtt{C} & \mathtt{D} & \mathtt{U} & & & \\
 & 1 & 5 & 2 & 3 & 7 & & \\ \cline{6-8}
- & 1 & 4 & & & 2 & & \\ \cline{1-3}
 & & 1 & & & \mathtt{C} & &
\end{array}$$

passo 2

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
 & \mathtt{M} & \mathtt{C} & \mathtt{D} & \mathtt{U} & & & \\
 & 1 & 5 & 2 & 3 & 7 & & \\ \cline{6-8}
- & 1 & 4 & \downarrow & & 2 & 1 & \\ \cline{1-3}
 & & 1 & 2 & & \mathtt{C} & \mathtt{D} & \\
 & & - & 7 & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 5 & & & &
\end{array}$$

passo 3

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
 & \mathtt{M} & \mathtt{C} & \mathtt{D} & \mathtt{U} & & & \\
 & 1 & 5 & 2 & 3 & 7 & & \\ \cline{6-8}
- & 1 & 4 & \downarrow & & 2 & 1 & 7 \\ \cline{1-3}
 & & 1 & 2 & & \mathtt{C} & \mathtt{D} & \mathtt{U} \\
 & & - & 7 & \downarrow & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 5 & 3 & & & \\
 & & - & 4 & 9 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 4 & & &
\end{array}$$

Vediamo assieme i vari passi dell'algoritmo:

1. Non cisono abbastanza migliaia per dividerle per 7, ma ci sono 15 centinaia. Il 7 nelle 15 centinaia è contenuto 2 centinaia di volte:
   - ➡ scrivo 2 sotto al 7,
   - ➡ moltiplico 2 per 7 e scrivo il suo opposto sotto alle centinaia,
   - ➡ trovo il resto delle centinaia ($15 - 14 = 1$) e lo scrivo sotto;
2. riporto a fianco del resto delle centinaia la cifra delle decine, ripeto lo stesso procedimento calcolando quante decine di volte 7 è contenuto in 12 decine e calcolo sotto alle decine il resto ottenuto: 5;
3. riporto a fianco il numero di unità, ripeto lo stesso meccanismo ottenendo alla fine il resto di unità.

In definitiva, nel 1523 il 7 è contenuto 217 volte con il resto di 4.:
$1523 : 7 \quad \rightarrow \quad Q = 217$ e $R = 4$ Infatti: $217 \cdot 7 + 4 = 1519 + 4 = 1523$ e: $4 \leqslant 7$

Alcuni altri esempi:

```
  3 2 7 | 2 3
- 2 3   | 1 4
    9 7
  - 9 2
      5
```

```
  1 3 2 9 | 1 0 7
- 1 0 7   | 1 2
    2 5 9
  - 2 1 4
      4 5
```

```
  1 2 5 9 4 3 | 1 7 1
- 1 1 9 7     | 7 3 6
      6 2 4
    - 5 1 3
      1 1 1 3
    - 1 0 2 6
          8 7
```

$Q = 14 \quad R = 5$ $\qquad$ $Q = 12 \quad R = 45$ $\qquad$ $Q = 736 \quad R = 87$

Divisori, numeri primi, numeri composti

Definizione 1.14: *Il numero n si dice divisore di m, e m multiplo di n, se il resto della divisione intera è zero:*

$$m \bmod n = 0$$

Prima di proseguire, disegna nel quaderno la seguente tabella e completala.

Nella prima colonna scrivi i numeri fino al 50, nella seconda scrivi tutti i divisori di quel numero ordinati dal minore al maggiore, nella terza scrivi quanti sono i divisori.

numero	divisori	numero di divisori
0	tutti i numeri naturali	∞
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
…		
50		

(a) Quale sarà il prossimo numero con un numero dispari di divisori? (*facile*)
(b) Quale sarà il prossimo numero con esattamente 2 divisori? (*difficile*)

Guardando la tabella dei divisori si può osservare che ogni numero è divisibile per 1 e per se stesso. Poi può avere altri divisori, questi altri divisori si chiamano divisori propri.

Definizione 1.15: *Chiamiamo* divisore proprio *di un numero un divisore diverso dal numero stesso e dall'unità.*

Per quanto riguarda il numero dei divisori possiamo anche osservare che due numeri sono particolari:

- ➡ *zero* è divisibile per ogni numero naturale perché quando dividiamo 0 per un qualunque numero otteniamo come resto 0.
- ➡ *uno* ha un solo divisore.

Dopo queste osservazioni possiamo dare le seguenti definizioni:

Definizione 1.16: *Un numero si dice* primo *se ha esattamente due divisori.*

Definizione 1.17: *Un numero si dice* composto *se ha più di due, ma non infiniti, divisori.*

Osservazioni 1.8:
- *2 è l'unico numero primo pari.*
- *Un numero è primo quando non è divisibile per nessun numero primo compreso tra 2 e la radice quadrata del numero.*
- *I numeri con un numero dispari di divisori, sono numeri quadrati.*

Ma quanti sono i numeri primi? La risposta a questa domanda venne data da Euclide con il seguente teorema che porta il suo nome:

Teorema 1.1 (di Euclide): *I numeri primi sono infiniti.*

La dimostrazione è ingegnosa ed è semplice: cercala e presentala ai tuoi compagni.

Criteri di divisibilità

Per vedere se un numero divide un altro *basta* eseguire la divisione e osservare se si ottiene un resto uguale a zero. Ma questo non sempre è comodo da fare, i matematici hanno scoperto dei trucchi per capire se un numero divide un altro senza dover eseguire la divisione: sono i *criteri di divisibilità*. Di seguito sono riportati i criteri relativi ai primi numeri naturali.

0: Nessun numero è divisibile per 0.
1: Tutti i numeri sono divisibili per 1.
2: 0, 2, 4, 6, 8 sono divisibili per 2 e un numero è divisibile per 2 se e solo se il numero formato dalla sua ultima cifra è divisibile per 2.
3: 0, 3, 6, 9 sono divisibili per 3 e un numero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre è un numero divisibile per 3.
4: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, …, 96, sono divisibili per 4 e un numero è divisibile per 4 se e solo se il numero formato dalle sue ultime 2 cifre, è divisibile per 4.
5: 0, 5 sono divisibili per 5 e un numero è divisibile per 5 se e solo se il numero formato dalla sua ultima cifra è divisibile per 5.
6: Un numero è divisibile per 6 se è divisibile per 2 e per 3.
7: 0, 7 sono divisibili per 7 e un numero maggiore di 10 è divisibile per 7 se la differenza, in valore assoluto, fra il numero ottenuto togliendo la cifra delle unità e il doppio della cifra delle unità è divisibile per 7.
Il numero 273 è divisibile per 7, infatti $|27 - 2 \cdot 3| = 21$ che è multiplo di 7.
Il numero 887 non è divisibile per 7, infatti $|88 - 2 \cdot 7| = 74$ che non è divisibile per 7.
8: 0, 8, 16, 24, 32, …, 200, …, 992, sono divisibili per 8 e un numero è divisibile per 8 se e solo se il numero formato dalle sue ultime 3 cifre, è divisibile per 8.

9: 0, 9 sono divisibili per 9, e un numero è divisibile per 9 se e solo se la somma delle sue cifre è un numero è divisibile per 9.

10: 0 è divisibile per 10 e un numero è divisibile per 10 se e solo se il numero formato dalla sua ultima cifra è divisibile per 10.

11: 0 è divisibile per 11 e un numero è divisibile per 11 se e solo se la differenza, in valore assoluto, fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari è un numero divisibile per 11.
Il numero 8261 è divisibile per 11, infatti $|(8+6)-(2+1)| = 11$;
Il numero 887 non è divisibile per 11, infatti $|8-(8+7)| = 7$.

12: Un numero è divisibile per 12 se è divisibile per 3 e per 4.

un numero qualunque: Un numero a è divisibile per un numero d se e solo se $a-n\cdot d$ è divisibile per d (dove n è un numero naturale qualsiasi).
Il numero 253 è divisibile per 23 perché $253 - 10 \cdot 23 = 253 - 230 = 23$ che è divisibile per 23.
Il numero 1894 è divisibile per 17 se e solo se lo è anche $1894 - 100 \cdot 17 = 1894 - 1700 = 194$ che è divisibile per 17 se e solo se lo è anche $194 - 10 \cdot 17 = 194 - 170 = 24$. Poiché 24 non è divisibile per 17 non lo sarà neppure 1894.

1.10 Scomposizione in fattori primi

Scomporre in fattori un numero significa scriverlo come prodotto di altri numeri naturali.

Teorema 1.2 (Teorema fondamentale dell'Aritmetica): *Ogni numero naturale $n > 1$ si può scrivere in modo unico come prodotto di numeri primi. Teorema fondamentale dell'Aritmetica*

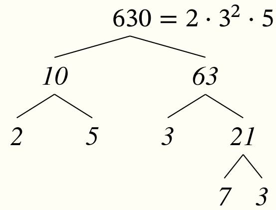
Per scomporre in fattori primi un numero, per prima cosa lo scomponiamo in due fattori, senza preoccuparci che siano primi, poi scomponiamo i fattori non primi fino ad ottenere solo fattori primi.

Scomposizione con un grafo ad albero

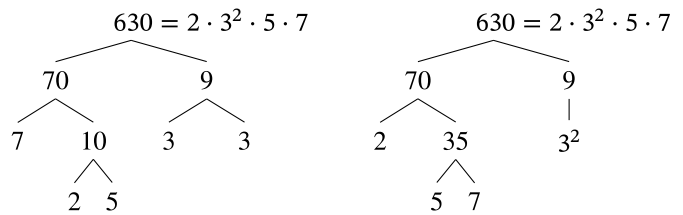
Anche per scomporre numeri possiamo usare un grafo ad albero come è illustrato negli esempi seguenti.

Esempio 1.14: *Scomporre in fattori primi il numero 630.*

$$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$



In generale, un numero può essere scomposto in fattori seguendo percorsi diversi. Per esempio, 630 può essere scomposto attraverso questi alberi diversi:



Qualunque strada si segua per effettuare la scomposizione, otterremo sempre lo stesso risultato.

Scomposizione con un metodo sequenziale

Possiamo anche usare un metodo sequenziale: Sottolinea e scomponi.

Esempio 1.15: *Scomporre in fattori primi il numero 1260.*

$\underline{1260} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
$\underline{10} \cdot \underline{126}$
$5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{63}$
$5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \underline{9}$
$5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3^2$

1.11 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo

Definizione 1.18: *Il* massimo comune divisore *di numeri naturali a e b è il più grande tra tutti i divisori comuni ad a e b e si indica con* $\mathrm{MCD}(a, b)$.

Esempio 1.16: *Applicando la definizione, calcola il* $\mathrm{MCD}(18,\ 12) = 6$.
I divisori di 18: *1, 2, 3, 6, 9, 18*
I divisori di 12: *1, 2, 4, 6, 12 I divisori comuni: 1, 2, 6,*
il più grande è 6, quindi: $\mathrm{MCD}(18,\ 12) = 6$.

Per calcolare il massimo comune divisore di due o più numeri si può applicare la seguente procedura:

Procedura 1.5: *Calcolo del* MCD *di due o più numeri naturali:*

(a) si scompongono i numeri in fattori primi;
(b) si moltiplicano tra loro i fattori comuni, presi una sola volta e con l'esponente minore.

Esempio 1.17: *Calcolare:* $\mathrm{MCD}(60,\ 48,\ 36)$.
Si scompongono in fattori i numeri: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $48 = 2^4 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$
Fattori comuni con esponente minimo: 2^2 *e* 3
Massimo comune divisore: $\mathrm{MCD}(60,\ 48,\ 36) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Esempio 1.18: *Calcolare:* $\text{MCD}(60, 120, 90)$.
Si scompongono in fattori i numeri: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$; $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
Fattori comuni con esponente minimo: *2, 3, 5:*
Massimo comune divisore: $\text{MCD}(60, 120, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

Definizione 1.19: *Due numeri* a *e* b *si dicono* primi tra loro *o* coprimi *se* $\text{MCD}(a, b) = 1$.

Esempio 1.19: *Numeri primi tra loro:*

- *12 e 25 sono primi tra loro. Infatti il* $\text{MCD}(12, 25) = 1$ *dato che nelle loro scomposizioni in fattori non si hanno fattori comuni:* $12 = 2^2 \cdot 3$ *e* $25 = 5^2$*;*
- *11 e 19 sono primi tra loro infatti il* $\text{MCD}(11, 19) = 1$ *dato che 11 e 19 sono numeri primi;*
- *12 e 15 non sono primi tra di loro in quanto hanno 3 come divisore comune.*

Definizione 1.20: *Il* minimo comune multiplo *di due numeri naturali* a *e* b *è il più piccolo tra tutti i multipli comuni non nulli dei due numeri e si indica con* $\text{mcm}(a, b)$.

Esempio 1.20: *Applicando la definizione, calcola il* $\text{mcm}(6, 15)$.
I primi multipli di 6: $0, 6, 12, 18, 24, \underline{30}, 36, 42, 48, 54, 60, 66, \ldots$
I primi multipli di 15: $0, 15, \underline{30}, 45, 60, 75, 90, \ldots$
I multipli comuni non nulli: $30, 60, 90, \ldots$
il più piccolo è 30, quindi: $\text{mcm}(6, 15) = 30$.

Per calcolare il minimo comune multiplo tra due o più numeri si può applicare la seguente procedura:

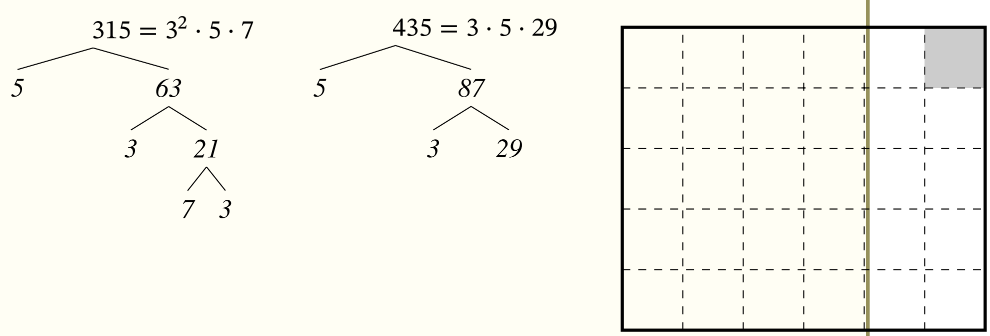
Procedura 1.6: *Calcolo del* mcm *di due o più numeri naturali:*

(a) si scompongono i numeri in fattori primi;
(b) si moltiplicano tra loro i fattori comuni e non comuni, presi una sola volta, con l'esponente maggiore .

Esempio 1.21: *Calcolare:* $\text{mcm}(60, 48, 36)$.
Si scompongono in fattori i numeri: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $48 = 2^4 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$
Fattori comuni e non comuni con esponente massimo: 2^3, 3^2, 5.
Minimo comune multiplo: $\text{mcm}(60, 48, 36) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$.

Esempio 1.22: *Calcolare il* $\text{mcm}(20, 24, 450)$.
Si scompongono in fattori i numeri: $20 = 2^2 \cdot 5$*;* $24 = 2^3 \cdot 3$*;* $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.
Fattori comuni e non comuni con esponente massimo: $2^3, 3^2, 5^2$.
Minimo comune multiplo: $\text{mcm}(20, 24, 450) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$.

Esempio 1.23: *Si vuole pavimentare una stanza a pianta rettangolare di* 315 cm *per* 435 cm *con mattonelle quadrate le più grandi possibile, senza tagliarle. Quali sono le dimensioni delle mattonelle? Quante mattonelle sono necessarie?*
Poiché le mattonelle devono essere quadrate devono avere il lato tale che entri un numero intero di volte sia nel 315 sia nel 435, pertanto la dimensione delle mattonelle deve essere un divisore comune di 315 e di 435. Poiché è richiesto che le mattonelle siano quanto più grandi possibile, la dimensione deve essere il massimo divisore comune.



La soluzione del problema è data quindi dal $\text{MCD}(315, 435) = 3 \cdot 5 = 15$. *Le mattonelle devono avere il lato di* 15 cm. *Ci vogliono* $435 : 15 = 29$ *mattonelle per ricoprire il lato di* 435 cm *e* $315 : 15 = 21$ *mattonelle per ricoprire il lato da* 315 cm. *In tutto occorrono* $29 \cdot 21 = 609$ *mattonelle.*

1.12 Esercizi

Esercizi dei singoli paragrafi

1.6 Operazioni con i numeri naturali

1.1. *Dimostra le seguenti affermazioni:*

(a) *La somma di due numeri naturali è un numero naturale.*

1.2. *Rappresenta con grafi e con un linguaggio di programmazione le seguenti funzioni:*

(a) *addizione;* (b) *sottrazione;* (c) *moltiplicazione;* (d) *divisione;* (e) *potenza;* (f) *radice quadrata.*

1.3. *Rappresenta con grafi le seguenti espressioni:*

(a) $57 + 62$ (b) $26 - 7$ (c) $25 \cdot 5$ (d) $48 : 3$ (e) 4^3 (f) $\sqrt{49}$

1.4. *Rispondi alle seguenti domande:*

(a) *Esiste il numero naturale che aggiunto a 3 dà come somma 6?*
(b) *Esiste il numero naturale che aggiunto a 12 dà come somma 7?*
(c) *Esiste il numero naturale che moltiplicato per 4 dà come prodotto 12?*
(d) *Esiste il numero naturale che moltiplicato per 5 dà come prodotto 11?*

1.5. *Inserisci il numero naturale mancante, se esiste:*

(a) $7 - \ldots = 1$ (b) $3 - 3 = \ldots$ (c) $5 - 6 = \ldots$ (d) $3 - \ldots = 9$ (e) $15 : 5 = \ldots$ (f) $18 : \ldots = 3$ (g) $\ldots : 4 = 5$ (h) $12 : 9 = \ldots$

1.6. *Vero o falso?*

(a) $5 : 0 = 0$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(b) $0 : 5 = 0$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(c) $5 : 5 = 0$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(d) $1 : 0 = 1$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(e) $0 : 1 = 0$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(f) $0 : 0 = 0$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(g) $1 : 1 = 1$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(h) $1 : 5 = 1$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(i) $4 : 0 = 0$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

1.7. *Se è vero che* $p = n \times m$*, quali affermazioni sono vere?*

(a) *p è multiplo di n* $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(b) *p è multiplo di m* $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(c) *m è multiplo di p* $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(d) *m è multiplo di n* $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(e) *p è divisibile per m* $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(f) *m è divisibile per n* $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(g) *p è divisore di m* $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(h) *n è multiplo di m* $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

1.8. *Quali delle seguenti affermazioni sono vere?*

(a) *6 è un divisore di 3* $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(b) *3 è un divisore di 6* $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(c) *8 è un multiplo di 2* $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
(d) *5 è divisibile per 10* $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

1.9. *Esegui le seguenti operazioni:*

(a) $18 \text{ div } 3 = \dots$
(b) $18 \text{ mod } 3 = \dots$
(c) $20 \text{ div } 3 = \dots$
(d) $20 \text{ mod } 3 = \dots$
(e) $185 \text{ div } 7 = \dots$
(f) $185 \text{ mod } 7 = \dots$
(g) $97 \text{ div } 5 = \dots$
(h) $97 \text{ mod } 5 = \dots$
(i) $240 \text{ div } 12 = \dots$
(j) $240 \text{ mod } 12 = \dots$
(k) $700 \text{ div } 8 = \dots$
(l) $700 \text{ mod } 8 = \dots$

1.10. *Esegui le seguenti divisioni con numeri a più cifre, senza usare la calcolatrice*

(a) $311 : 22$
(b) $429 : 37$
(c) $512 : 31$
(d) $629 : 43$
(e) $755 : 53$
(f) $894 : 61$
(g) $968 : 45$
(h) $991 : 13$
(i) $1232 : 123$
(j) $2324 : 107$
(k) $3435 : 201$
(l) $4457 : 96$
(m) $5567 : 297$
(n) $6743 : 311$
(o) $7879 : 201$
(p) $8967 : 44$
(q) $13455 : 198$
(r) $22334 : 212$
(s) $45647 : 721$
(t) $67649 : 128$

1.11. *Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o false indicando la proprietà utilizzata:*

(a) $33 : 11 = 11 : 33$ *proprietà*...................... V F
(b) $108 - 72 : 9 = (108 - 72) : 9$ *proprietà*...................... V F
(c) $8 - 4 = 4 - 8$ *proprietà*...................... V F
(d) $35 \cdot 10 = 10 \cdot 35$ *proprietà*...................... V F
(e) $9 \cdot (2 + 3) = 9 \cdot 3 + 9 \cdot 2$ *proprietà*...................... V F
(f) $80 - 52 + 36 = (20 - 13 - 9) \cdot 4$ *proprietà*...................... V F
(g) $(28 - 7) : 7 = 28 : 7 - 7 : 7$ *proprietà*...................... V F
(h) $(8 \cdot 1) : 2 = 8 : 2$ *proprietà*...................... V F
(i) $(8 - 2) + 3 = 8 - (2 + 3)$ *proprietà*...................... V F
(j) $(13 + 11) + 4 = 13 + (11 + 4)$ *proprietà*...................... V F

1.12. *Data la seguente operazione tra i numeri naturali $a \circ b = 2 \cdot a + 3 \cdot b$, verifica se è:*

(a) *commutativa, cioè se $a \circ b = b \circ a$*
(b) *associativa, cioè se $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$*
(c) *0 è elemento neutro*

?? ??

1.13. *Inserisci i numeri mancanti:*

(a) $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = 3^{\dots+\dots+\dots} = 3^{\dots}$
(b) $3^4 : 3^2 = 3^{\dots-\dots} = 3^{\dots}$
(c) $(3 : 7)^5 = 3^{\dots} : 7^{\dots}$
(d) $6^3 : 5^3 = (6 : 5)^{\dots}$
(e) $7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3 = (7 \cdot 5 \cdot 2)^{\dots}$
(f) $(2^6)^2 = 2^{\dots\cdot\dots} = 2^{\dots}$
(g) $(18^6) : (9^6) = (\dots\dots)^{\dots} = 2^{\dots}$
(h) $(5^6 \cdot 5^4)^4 : [(5^2)^3]^6 = \dots\dots\dots = 5^{\dots}$

1.14 (*). *Calcola applicando le proprietà delle potenze:*

(a) $2^5 \cdot 2^3 : 2^2 \cdot 3^6$ *[6^6]*
(b) $(5^2)^3 : 5^3 \cdot 5$ *[5^4]*
(c) $\{[(2^3)^2 : 2^3]^3 : 2^5\} : (2^8 : 2^6)^2$ *[1]*
(d) $[(2^1)^4 \cdot 3^4]^2 : 6^5 \cdot 6^0$ *[6^3]*

1.15. *Calcola:*

(a) $2^2 \cdot (2^3 + 5^2)$
(b) $[(3^6 : 3^4)^2 \cdot 3^2]^1$
(c) $4^4 \cdot (3^4 + 4^2)$
(d) $3^4 \cdot (3^4 + 4^2 - 2^2)^0 : 3^3 + 0 \cdot 100$

1.16. *Completa, applicando le proprietà delle potenze:*

(a) $7^4 \cdot 7^{\cdots} = 7^5$
(b) $3^9 \cdot 5^9 = (\ldots\ldots)^9$
(c) $5^{15} : 5^{\cdots} = 5^5$
(d) $(\ldots\ldots)^6 \cdot 5^6 = 15^6$
(e) $8^4 : 2^4 = 2^{\cdots}$
(f) $(18^5 : 6^5)^2 = 3^{\cdots}$
(g) $20^7 : 20^0 = 20^{\cdots}$
(h) $(\ldots^3)^4 = 1$
(i) $(7^3) \cdot 7^{\cdots} = 7^{14}$

1.17. *Il risultato di* $3^5 + 5^3$ *è:* $\boxed{A}$ *368* $\boxed{B}$ $(3+5)^5$ $\boxed{C}$ $15+15$ $\boxed{D}$ 8^8

1.18. *Il risultato di* $(73+27)^2$ *è:* $\boxed{A}$ *200* $\boxed{B}$ $73^2 + 27^2$ $\boxed{C}$ 10^4 $\boxed{D}$ 1000

1.7 Espressioni numeriche

1.19. *Esegui le seguenti operazioni rispettando la precedenza algebrica*

(a) $15 + 7 - 2$
(b) $16 - 4 + 2$
(c) $18 - 8 - 4$
(d) $16 \times 2 - 2$
(e) $12 - 2 \times 2$
(f) $10 - 5 \times 2$
(g) $20 \times 4 : 5$
(h) $16 : 4 \times 2$
(i) $2 + 2^2 + 3$
(j) $4 \times 2^3 + 1$
(k) $2^4 : 2 - 4$
(l) $(1+2)^3 - 2^3$
(m) $(3^2)^3 - 3^2$
(n) $2^4 + 2^3$
(o) $2^3 \times 3^2$
(p) $3^3 : 3^2 \times 3^2$

Le espressioni che seguono sono state elaborate a partire da quelle che si possono trovare all'indirizzo: www.ubimath.org/potenze Ringrazio Ubaldo Pernigo per la competenza e disponibilità

1.20. $2^2 + 3^2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 2^4 + 7 \cdot 5^2 - 2^3 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 3^3$ *[48]*

1.21. $2^2 \cdot [(2^2 \cdot 3 : 3 + 5 \cdot 2^2) : (2 \cdot 3) + 1^3]$ *[20]*

1.22. $10^1 + (2 + 11 - 3^2)^2 - (2^2 + 4^2 + 6)$ *[0]*

1.23. $2^1 + 3^2 + 4^2 - 5^2 - 4^0$ *[1]*

1.24. $24 : (3 \cdot 2^2) + 2^2 \cdot (3^2 + 3^0 - 2^3)$ *[10]*

1.25. $5 + 2 \cdot [5 + 2 \cdot (2^2 + 5) : 3 - 3^2] - 2 \cdot 3$ *[3]*

1.26. $(5^2 + 3^2 - 1) : 3 + (3^3 + 1) : 7$ *[15]*

1.27. $(3 \cdot 4 + 2^3 \cdot 2 + 7 \cdot 6) : 10 \cdot 3 - 2^2 \cdot 5$ *[1]*

1.28. $3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 + (7 + 2) : 9 + (27 - 2) : 5$ *[37]*

1.29. $(3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0 - 10) : 6 + 6^2 : 6$ *[11]*

1.30. $\{[(2^6 - 2^5 - 2^4 - 2^3) : 2^2 + 1]^3 \cdot 2 - 24\}^2 + 3$ *[903]*

1.31. $\{16 : (6^2 - 10 \cdot 2) + [(7 \cdot 3 + 3^3 \cdot 3 - 2)^2 : 10^3] : (7^2 - 11 \cdot 4) - 2\}^5$ *[1]*

1.32. $[(2^2 \cdot 2^5) : (2 \cdot 2^3)]^2$ *[64]*

1.33. $(2^2 \cdot 2)^2 : (5 \cdot 2^2 - 2^2) + [7^2 : (5^2 - 3^2 \cdot 2) + 13^3 : 13^2] : 2^2 + (7^4 \cdot 7^2)^0 - 3^2$ *[1]*

1.34. $[13^6 \cdot (13^5 : 13)]^2 : [13^{13} : (13^2 \cdot 13^3)^2]^6$ *[169]*

1.35. $(3 \cdot 5 - 2^2 \cdot 2) \cdot 3^2 + 3^3 \cdot 2^2 - 7 \cdot 3^2$ *[108]*

1.36. $[(3^4)^3 : 3^{10}]^5 : 3^9 + (5^4)^3 : 5^{10} - 2^2 \cdot 7^1$ *[0]*

1.37. $[(7^4 \cdot 2^4 \cdot 9^4) : (7^2 \cdot 2^2 \cdot 9^2)]^4 : (504^8 : 4^8)$ *[1]*

1.38. $(13 \cdot 3^3 - 2^6 \cdot 5)^2 : 31 + [(6-5)^6 + (2^2 + 3^2 - 2^1)] : (2^4 : 2^2)$ *[34]*

1.39. $(2^4 - 5^2 : 5 \cdot 3) : 1 + (2 \cdot 3 \cdot 6 - 2^2 \cdot 3^2) + 2^2 \cdot 3^2 : [2^3 \cdot 3 + 2^2\, cdot3 \cdot (2^3 - 7)]$ *[2]*

1.40. $25 : 5 + (8^2 - 15 \cdot 3 - 2^3) - 27 : (4^2 + 3 - 10)$ *[13]*

1.41. $\{[(2^6 \cdot 2^4 : 2^8) : 2^2 + 1]^3 : 2^2\}^0$ *[1]*

1.42. $[(5^2)^3 \cdot 5^4] : [5^4 \cdot (5^2)^2]$ *[25]*

1.43. $[(3^2 \cdot 3^4) \cdot (3^2 \cdot 3)]^2 : 3^{16}$ *[9]*

1.44. $1^3 + (2^2)^3 : (5 - 4 + 1)^4 + [7^2 : (5^2 - 3^2 \cdot 2) + 13^4 : 13^3] : 2^2 + 1^5$ *[11]*

1.45. $2^2 + \{[7 \cdot (5^3 : 5^2 \cdot 3^0 + 5^1) + (3^5 : 3^2 + 3)] : (5^4 : 5^2) - 2^2\} - [2^3 \cdot 5 : (2 \cdot 5)]^3 : 2^4$ *[0]*

$$4 + \{[7 \cdot (5 \cdot 3^3 : 3^3 + 5) + (3^3 + 3)] : 5^2 - 2^2\} - [(2^3 \cdot 3^2 - 2^6) \cdot 5 : 10]^3 : 2^4[0]$$

1.8 Espressioni con un buco

Le espressioni che seguono sono state elaborate a partire da quelle che si possono trovare all'indirizzo: www.ubimath.org/potenze Ringrazio Ubaldo Pernigo per la competenza e disponibilità

1.46. $8^2 - 3^{\cdots} \cdot 5 + (2^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 9) : 4^2 + 3^0$ *[20]*

1.47. $(7^2 - 2 \cdot 5 + 15 : 3) : 4 + (3 \cdot 2^2 + 3^{\cdots} - 4^2)^2$ *[36]*

1.48. $5^1 + (\ldots^2 - 5 \cdot 3^2 - 2^3) - 3^3 : (4^2 + 3 - 10)$ *[13]*

1.49. $2^2 + 3^{\cdots} + 5^2 - 2 \cdot 3 - 8 \cdot 4$ *[0]*

1.50. $(5^2 - 3^2) : 2^2 + 9^{\cdots} \cdot 8^2 : 8^1$ *[12]*

1.51. $(2^3 + 2^4) : 2 + \ldots \cdot 3 - 2^2 \cdot 5$ *[31]*

1.52. $[(7^5 \cdot 7^{\cdots}) : (7^4)^3] : 7^2$ *[1]*

1.53. $(1^5 + 1^6 + 1^8 + 1^{10}) \cdot 4 - 2^{\cdots}$ *[0]*

1.54. $81 : 3^2 + 32 : 2^2 + \ldots : 5^2 - (4 \cdot 2 - 2^3) : 3$ *[19]*

1.55. $\{[(2^6 - 2^5 - 2^4 - 2^3) : 4 + \ldots] \cdot 8 - 24\} + 3$ *[3]*

1.56. $3 \cdot 2 + (2^{\cdots} : 2^2 + 3^2 : 3) \cdot 5 - (6 : 2 + 44 : 4) : 7$ *[29]*

1.57. $\{5 \cdot 16 - (6^2 - 2^4) - [(3^2 - \ldots^2) \cdot 10 - 5]\} - [(2^2 \cdot 5 + 2^3) : (3^3 - 5^2)]$ *[1]*

1.58. $[2 + 15 : (2^3 \cdot 5 - 3^3 + 2)]^4 : 3 \cdot 2 - 2 \cdot (\ldots - 5 \cdot 12 : 3)^2$ *[4]*

1.59. $5^2 : 5 \cdot [(3 \cdot 5^2 + 4 : 2) : 7 - 2 \cdot 5]^2 + 2^{\cdots} : 2^2 - 5^2 : 5$ *[8]*

1.60. $12^{10} : 12^9 + 3^2 \cdot 6^2 : 6^2 + 12^2 : (5 \cdot 2^2 - 19) - (5^4)^{\cdots} : 5^{10}$ *[140]*

1.61. $(2^2)^3 + (22 - 5 \cdot 4)^2 + \ldots^2 - 4^2 \cdot 5$ *[69]*

1.62. $(3^5)^3 : 3^{13} + 3^{10} : 3^9 + 9^5 \cdot 9^{\cdots} \cdot 9^4 : 9^{16}$ *[13]*

1.63. $3^3 \cdot 3^7 \cdot 3^2 : (3^6 \cdot 3^6) + 5^2 - [6^2 + 2^2 + 2 \cdot 50 - (2^3 \cdot \ldots)] : 10^2$ *[25]*

1.64. $(2 \cdot 5)^3 : 5^3 - (2^{\cdots} : 2^2) \cdot \{(6 - 2^2) \cdot [6 - 5^0 - (2^4 : 2^2)]\}$ *[4]*

1.65. $2^2 \cdot 2^6 : 2^5 : 2 + 2^6 : (2^{\cdots} \cdot 2^2) - 2^9 : 2^7 + (6^2 \cdot 2^2) : 18 + 7^3 : 7^2$ *[16]*

1.66. $1^4 + (21 + \ldots - 3^3)^2 - (2^2 + 4^2 + 6)$ *[0]*

1.67. $(2^4)^5 : 2^{19} + (4^{\cdots})^8 : 4^{47}$ *[6]*

1.68. $[(7^5 \cdot 7^{\cdots})] : [(7^3)^4] : 7^2$ *[1]*

1.69. $(2 \cdot 2^{\cdots} \cdot 2^3 \cdot 2^4) : 2^9 + (3^3 \cdot 3^5 \cdot 3^7) : 3^{14}$ *[4]*

1.70. $\{[(3^3 \cdot 3^4)^2 : 3^6] : 3^{\cdots} - 2 \cdot 3^2\} : 3 + \{[(5^2 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2) : 10]^2 + 1\} : 5$ *[5]*

1.71. $1+\{24^4 : 8^4-5^2 \cdot 2 : [2+2^4 : (2^3-2 \cdot 3)]\} : \{[20^{\cdots} : (2 \cdot 10)^6-2^2 \cdot 5^2] : 10^2+1\}$ *[20]*

1.72. $\{21+[(2^9 : 2^6+3^2 \cdot 3^2 \cdot 5-5^3 \cdot 3) : 19]^2-(7 \cdot 2^3+5^2 \cdot 5- dots^2 : 2^2) : 29\}^2 : 100$ *[4]*

1.73. $[2^4+(\ldots+3^6 : 3^2) : 5-(17^6 : 17^6)] : 17-[(17^4 : 17^4)+2^2 \cdot (2^3-1)-2^4] : 13$ *[1]*

1.9 Divisibilità e numeri primi

1.74 (Crivello di Eratostene). *Nella tabella che segue sono rappresentati i numeri naturali fino a 100. Per trovare i numeri primi, seleziona 1 e 2, poi cancella tutti i multipli di 2. Seleziona il 3 e cancella i multipli di 3. Seleziona il primo dei numeri che non è stato cancellato, il 5, e cancella tutti i multipli di 5. Procedi in questo modo fino alla fine della tabella. Quali sono i numeri primi minori di 100?*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1.75. *Per quali numeri sono divisibili? Segna i divisori con una crocetta*

(a) *1320 è divisibile per* $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{13}$

(b) *2344 è divisibile per* $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{13}$

(c) *84 è divisibile per* $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{13}$

(d) *1255 è divisibile per* $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{13}$

(e) *165 è divisibile per* $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{13}$

(f) *720 è divisibile per* $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{13}$

(g) *792 è divisibile per* $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{13}$

(h) *462 è divisibile per* $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{13}$

1.10 Scomposizione in fattori primi

1.76. *I numeri sotto elencati sono scritti come prodotto di altri numeri: sottolinea le scritture in cui ciascun numero è scomposto in fattori primi*

(a) $68 = 17 \cdot 4 = 17 \cdot 2^2 = 2 \cdot 34$
(b) $45 = 5 \cdot 9 = 15 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2$
(c) $36 = 6 \cdot 6 = 6^2$
(d) $44 = 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11 = 2^2 \cdot 11$
(e) $17 = 17 \cdot 1$
(f) $48 = 6 \cdot 8 = 12 \cdot 4 = 3 \cdot 2^4 = 16 \cdot 3$
(g) $60 = 2 \cdot 30 = 15 \cdot 4 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 6$
(h) $102 = 6 \cdot 17 = 3 \cdot 34 = 2 \cdot 3 \cdot 17 = 2 \cdot 51$
(i) $200 = 2 \cdot 10^2 = 2^3 \cdot 5^2 = 2 \cdot 4 \cdot 25$
(j) $380 = 19 \cdot 10 \cdot 2 = 19 \cdot 5 \cdot 2^2$

1.77. *Rispondi alle domande:*

(a) *ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero?*
(b) *ci può essere più di una scomposizione in fattori primi di un numero?*
(c) *quando un numero è scomposto in fattori primi?*

1.78. *Descrivi brevemente la differenza tra le seguenti frasi*

(a) *a e b sono due numeri primi*
(b) *a e b sono due numeri primi tra di loro*

Fai degli esempi che mettano in evidenza la differenza descritta

1.79 (*). *Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:*

(a) 52
(b) 60
(c) 72
(d) 81
(e) 105
(f) 120
(g) 135
(h) 180
(i) 225
(j) 525

1.80 (*). *Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:*

(a) 675 (b) 715 (c) 1900 (d) 1078 (e) 4050 (f) 4536 (g) 12150 (h) 15246 (i) 85050 (j) 138600

☐ $3^3 \cdot 2^5$; ☐ $3 \cdot 5 \cdot 47$; ☐ $2^2 \cdot 5^2 \cdot 19$; ☐ $2 \cdot 7^2 \cdot 11$; ☐ $2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$; ☐ $2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$;
☐ $2 \cdot 3^5 \cdot 5^2$; ☐ $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2$; ☐ $2 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$; ☐ $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$.

1.11 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo

1.81. *Applicando la definizione 1.11 trova il* MCD *tra i numeri 54 e 132*

1.82. *Calcola* MCD *e* mcm *dei numeri 180, 72, 90*
Scomponendo in fattori si ha $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$ $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$\text{MCD} = 2^{\cdots} \cdot 3^{\cdots} = \ldots$; $\text{mcm} = 2^{\cdots} \cdot 3^{\cdots} \cdot 5^{\cdots} = \ldots$

1.83 (*). *Calcola* mcm *e* MCD *tra i seguenti gruppi di numeri:*

(a) 15; 5; 10 (b) 2; 4; 8 (c) 2; 1; 4 (d) 5; 6; 8 (e) 24; 12; 16 (f) 6; 16; 26 (g) 6; 8; 12 (h) 50; 120; 180 (i) 20; 40; 60 (j) 16; 18; 32 (k) 30; 60; 27 (l) 45; 15; 35

1.84 (*). *Calcola* mcm *e* MCD *tra i seguenti gruppi di numeri:*

(a) 24; 12; 16 (b) 6; 4; 10 (c) 5; 4; 10 (d) 12; 14; 15 (e) 3; 4; 5 (f) 6; 8; 12 (g) 15; 18; 21 (h) 12; 14; 15 (i) 15; 18; 24 (j) 100; 120; 150 (k) 44; 66; 12 (l) 24; 14; 40

1.85 (*). *Tre funivie partono contemporaneamente da una stessa stazione sciistica. La prima compie il tragitto di andata e ritorno in 15 minuti, la seconda in 18 minuti, la terza in 20. Dopo quanti minuti partiranno di nuovo insieme?* [3h]

1.86 (*). *Due aerei partono contemporaneamente dall'aeroporto di Milano e vi ritorneranno dopo aver percorso le loro rotte: il primo ogni 15 giorni e il secondo ogni 18 giorni. Dopo quanti giorni i due aerei si troveranno di nuovo insieme a Milano?* [90g]

1.87. *Disponendo di 56 penne, 70matite e 63 gomme, quante confezioni uguali si possono fare? Come sarà composta ciascuna confezione?*

1.88. *Una cometa passa in prossimità della Terra ogni 360 anni, una seconda ogni 240 anni e una terza ogni 750 anni Se quest'anno sono state avvistate tutte e tre, fra quanti anni sarà possibile vederle di nuovo tutte e tre nello stesso anno?*

Esercizi riepilogativi

1.89. *Quali delle seguenti scritture rappresentano numeri naturali?*

(a) $5+3-1$ (b) $6+4-10$ (c) $5-6+1$ (d) $7+2-10$ (e) $2 \cdot 5 : 5$ (f) $2 \cdot 3 : 4$ (g) $3 \cdot 4 - 12$ (h) $12 : 4 - 4$ (i) $11 : 3 + 2$ (j) $27 : 9 : 3$ (k) $18 : 2 - 9$ (l) $10 - 1 : 3$

1.90. *Calcola il risultato delle seguenti operazioni nei numeri naturali; alcune operazioni non sono possibili, individuale*

(a) $5 : 5 = \ldots$	*(e)* $10 : 2 = \ldots$	*(i)* $10 : 5 = \ldots$	*(m)* $0 \cdot 0 = \ldots$
(b) $5 : 0 = \ldots$	*(f)* $0 : 5 = \ldots$	*(j)* $1 : 5 = \ldots$	*(n)* $1 \cdot 0 = \ldots$
(c) $1 \cdot 5 = \ldots$	*(g)* $5 \cdot 1 = \ldots$	*(k)* $0 \cdot 5 = \ldots$	*(o)* $1 : 0 = \ldots$
(d) $1 - 1 = \ldots$	*(h)* $0 : 0 = \ldots$	*(l)* $5 : 1 = \ldots$	*(p)* $1 : 1 = \ldots$

1.91. *Aggiungi le parentesi in modo che l'espressione abbia il risultato indicato*
$2+5\cdot 3+2=35$ $\quad$ $2+5\cdot 3+2=27$

1.92 (*). *Traduci in espressioni aritmetiche le seguenti frasi e calcola il risultato:*

(a) aggiungi 12 al prodotto tra 6 e 4
(b) sottrai il prodotto tra 12 e 2 alla somma tra 15 e 27
(c) moltiplica la differenza tra 16 e 7 con la somma tra 6 e 8
(d) al doppio di 15 sottrai la somma dei prodotti di 3 con 6 e di 2 con 5
(e) sottrai il prodotto di 6 per 4 al quoziente tra 100 e 2
(f) moltiplica la differenza di 15 con 9 per la somma di 3 e 2
(g) sottrai al triplo del prodotto di 6 e 2 il doppio del quoziente tra 16 e 4
(h) il quadrato della somma tra il quoziente intero di 25 e 7 e il cubo di 2
(i) la somma tra il quadrato del quoziente intero di 25 e 7 e il quadrato del cubo di 2
(j) la differenza tra il triplo del cubo di 5 e il doppio del quadrato di 5

a) 36, b) 18, c) 126, d) 2, e) 26, f) 30

Le espressioni che seguono sono state elaborate a partire da quelle che si possono trovare all'indirizzo: www.ubimath.org/potenze Ringrazio Ubaldo Pernigo per la competenza e disponibilità

Calcola il valore delle seguenti espressioni:

1.93. $(13+3\cdot 5^2:3+15+19):(3\cdot 2^2)+(2^3-2^2-2)\cdot 170^0$ *[7]*

1.94. $5^1+2\cdot(4^2+2\cdot 7-15)-(7^2-5^2-4^2)\cdot 2^2+7$ *[10]*

1.95. $[2^4+(2^5:2^4+2\cdot 3)\cdot 2^2]:2^3+10-4^2+3^3:3^2$ *[3]*

1.96. $[(9^2-7^2):(3^2-1)+(8^2-5^2):(3^2+2^2)]\cdot 5$ *[35]*

1.97. $[(3^2\cdot 2^3-2\cdot 5^2+2^{11}:2^4):(3\cdot 5)-2]:(4^2-2^3)$ *[1]*

1.98. $2^{10}:2^8+3^2-2^2\cdot 3^0+4^2-2^3$ *[17]*

1.99. $[5+2^2\cdot 3^2-5\cdot(2^4-2^2-2^2+3^2-27:3)]\cdot 3^0\cdot 3^2$ *[9]*

Calcola il valore mancante nelle seguenti espressioni:

1.100. $33^4:\{24^2:[19^3:(3^2\cdot 2+4^{\cdots})^2+5]^2+2^5\}^3$ *[33]*

1.101. $(13+2^2+75:\ldots+2\cdot 3^2):(3\cdot 2^2)+(2^3-2^2-2)\cdot 17^0$ *[8]*

1.102. $35:7+13\cdot 2^2-\ldots:2^3-11\cdot 3-84:7$ *[0]*

1.103. $(15:3+7^2-2\cdot 5):4+[(3\cdot 2^2)+\ldots^2-4^2]^2$ *[36]*

1.104. $(5^2-3^2\cdot 2):7+(\ldots^2-4^3):(3^0+3+3^2)$ *[1]*

1.105. $[(2^{\cdots}\cdot 7+3^3\cdot 2^2):11]:(2^3\cdot 15-10^2)+(52:13):2$ *[3]*

1.106. $3^7:3^5+8^2+2^{\cdots}\cdot 2^7:2^{11}$ *[75]*

1.107. $[(\ldots+5\cdot 2-2\cdot 11)\cdot 2^2+(3^2-2^3)]\cdot(8^2-7\cdot 9)$ *[1]*

1.108. *In una città le linee della metropolitana iniziano il loro servizio alla stessa ora. La linea rossa fa una corsa ogni 15 min, la linea gialla ogni 20 min e la linea blu ogni 30 min. Salvo ritardi, ogni quanti minuti le tre linee partono allo stesso momento?*

1.109. *Tre negozi si trovano sotto lo stesso porticato, ciascuno ha un'insegna luminosa intermittente: la prima si spegne ogni 6 secondi, la seconda ogni 5 secondi, la terza ogni 7 secondi. Se tutte le insegne vengono accese alle 19.00 e spente alle 21.00, quante volte durante la serata le tre insegne si spegneranno contemporaneamente?*

1.110. *In una gita scolastica ogni insegnante accompagna un gruppo di 12 studenti. Se alla gita partecipano 132 studenti, quanti insegnanti occorrono?*

1.111. *Un palazzo è costituito da 4 piani con 2 appartamenti per ogni piano. Se ogni appartamento ha 6 finestre con 4 vetri ciascuna, quanti vetri ha il palazzo?*

1.112. *Spiega brevemente il significato delle seguenti parole:*

(a) *numero primo*
(b) *numero dispari*
(c) *multiplo*
(d) *cifra*

1.113. *Rispondi brevemente alle seguenti domande:*

(a) *cosa vuol dire scomporre in fattori un numero?*
(b) *ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero?*
(c) *cosa vuol dire scomporre in fattori primi un numero?*

Numeri interi relativi 2

In questo capitolo incontrerai:

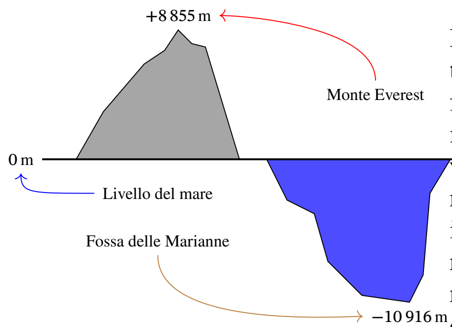
- i numeri interi;
- la funzione *valore assoluto*;
- il confronto tra interi;
- le operazioni con gli interi e le loro proprietà.

2.1 I numeri che precedono lo zero

Con i numeri naturali non sempre è possibile eseguire l'operazione di sottrazione. In particolare, non è possibile sottrarre un numero più grande da un numero più piccolo, per esempio $5 - 12$. Tuttavia ci sono situazioni in cui una sottrazione di questo tipo deve essere eseguita.

Per esempio, è possibile acquistare un'auto di € 12 000 pur avendo soltanto risparmi in banca di soli € 5 000. In questo caso si tratta di togliere dai € 5 000 i € 12 000 che servono per acquistare l'auto: materialmente non è possibile e si ricorre a un prestito.

Pensiamo ad una comunicazione dei meteorologi relativa alle previsioni del tempo: «domani la temperatura, a causa di una perturbazione proveniente dai paesi nordici, potrebbe subire un drastico calo e scendere anche di 10 gradi». Riflettiamo: se oggi la temperatura è di 9 gradi, come possiamo esprimere numericamente la temperatura prevista per domani? Alcuni diranno: «il liquido contenuto nel termometro si posizionerà al di sotto dello zero», altri «domani la temperatura sarà di un grado sotto lo zero» e altri ancora «la temperatura sarà di -1 grado».



Leggiamo nel testo di geografia: «Il punto più profondo della Terra si trova nella fossa delle Marianne; esso supera di 2 061 metri l'altezza del monte Everest e si trova a 10 916 metri sotto il livello del mare». Se attribuiamo al livello del mare il valore zero, allora potremmo esprimere la profondità della Fossa con il numero $-10\,916$ e l'altezza del monte Everest con il numero $+8\,855$.

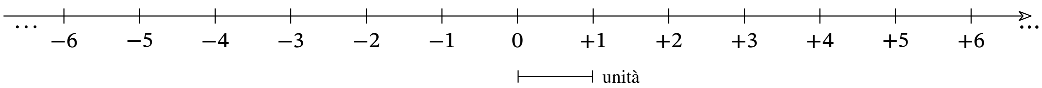
Per rappresentare le grandezze che hanno due sensi, come temperature, crediti e i debiti, latitudine nord e sud, altezze sopra il livello del mare e profondità marine i numeri naturali non bastano. I matematici in queste situazioni usano i numeri interi relativi che si scrivono utilizzando gli stessi numeri naturali ma preceduti dal segno "+"

se sono numeri maggiori di 0 e dal segno "−" se sono numeri minori di 0. L'insieme di questi numeri si costruisce raddoppiando i numeri naturali $\mathbb{N}$ e facendo precedere ciascun numero dal segno "+" o "−", ad eccezione dello 0, al quale non si attribuisce segno.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, \quad 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$$

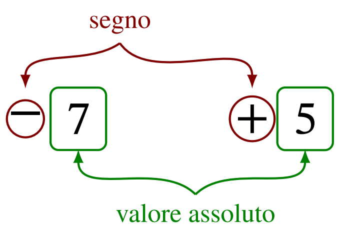
2.2 I numeri interi relativi e la retta

Anche numeri relativi possono essere rappresentati su una retta. Disegniamo una retta, su di essa prendiamo un punto di riferimento al quale associamo il numero zero, il verso di percorrenza da sinistra verso destra, un segmento AB come un'unità di misura. Riportiamo questa unità di misura più volte partendo da zero e procedendo nel verso stabilito aggiungiamo ogni volta uno: ai punti trovati associamo gli interi positivi. Ripetiamo l'operazione partendo dallo zero, ma con il verso di percorrenza a sinistra: ai punti trovati associamo gli interi negativi.



Possiamo interpretare questi numeri come il numero di passi da fare sulla retta, partendo dallo zero verso destra se il segno è positivo, verso sinistra se il segno è negativo.

L'insieme dei numeri interi relativi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}$. In particolare, l'insieme dei numeri interi positivi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}^+$, l'insieme dei numeri interi negativi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}^-$. Possiamo quindi dire che: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.



Definizione 2.1 (Numeri interi): *Un numero intero si ottiene da un numero naturale con l'aggiunta di un segno che può essere:* $-$ *o* $+$.

Osservazione 2.1: *Il sottoinsieme formato dallo zero e dai numeri interi positivi,* $\{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ *è isomorfo*[a] *all'insieme dei numeri naturali. Questo permette di non considerare il segno* $+$ *senza che sorgano problemi:* $+13 = 13$

[a] cioè funziona esattamente come i numeri naturali

Definizione 2.2: *Due numeri relativi si dicono* concordi, *se hanno lo stesso segno; si dicono* discordi *se hanno segni opposti.*

Esempio 2.1: *Concordi-discordi.*
$+3$ *e* $+5$ *sono concordi;* $+3$ *e* -5 *sono discordi;* -5 *e* -2 *sono concordi.*

Definizione 2.3 (Valore assoluto): *La funzione* valore assoluto *($abs(n)$) se riceve come argomento un numero intero qualsiasi dà come risultato un numero intero non negativo. È definita come:*

$$abs(x) = \begin{cases} -x & se \quad x < 0 \\ +x & se \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Il valore assoluto permette di passare dai numeri interi ai numeri naturali. In questo passaggio si perde, ovviamente, dell'informazione.

Nelle espressioni il valore assoluto si può indicare inserendo il numero relativo tra due barre verticali (| |). In linguaggio matematico:

$$|a| = a, \quad \text{se} \quad a \geqslant 0, \qquad |a| = -a, \quad \text{se} \quad a < 0$$

Esempio 2.2: *Valore assoluto:* $|+2| = +2 \quad |-5| = +5 \quad |-73| = +73 \quad |+13| = +13$

Definizione 2.4: *Due numeri interi relativi sono* uguali *se hanno lo stesso segno e lo stesso valore assoluto; si dicono* opposti *se hanno lo stesso valore assoluto ma segni diversi.*

Esempio 2.3: *Sono numeri opposti:* $+3$ *e* -3 $+5$ *e* -5 $+19$ *e* -19.

Numeri opposti hanno lo stesso valore assoluto: $|-17| = |+17| = +17$

2.3 Confronto di numeri relativi

Usando la rappresentazione dei numeri sulla retta l'ordinamento risulta facile da verificare: il verso di percorrenza della retta (la freccia) indica la direzione nella quale i numeri crescono. Quindi dati due numeri interi relativi quello più grande è quello che, sulla retta orientata è rappresentato *dopo* muovendosi nel verso fissato.

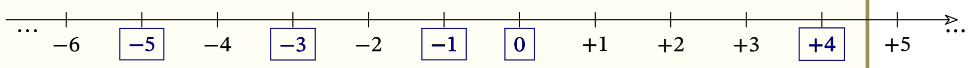
Le seguenti definizioni permettono di effettuare il confronto tra interi relativi usando il confronto tra numeri naturali.

Definizione 2.5 (Confronto di interi): *Le seguenti tre regole permettono di confrontare due numeri interi qualunque.*

1. *ogni numero negativo è minore di 0 e ogni numero positivo è maggiore di 0;*
2. *tra due numeri positivi il più grande è quello che ha valore assoluto maggiore;*
3. *tra due numeri negativi il più grande è quello che ha valore assoluto minore.*

Esempio 2.4: *Confronta le seguenti coppie di numeri.*

- $+4 > +2$: *i numeri sono positivi, il maggiore è* $+4$ *perché ha valore assoluto maggiore;*
- $-1 > -3$: *i due numeri sono negativi, il maggiore è* -1 *perché ha valore assoluto minore;*
- $+4 > -5$: *i numeri positivi sono maggiori dei numeri negativi;*
- $+4 > 0$: *ogni numero positivo è maggiore di 0;*
- $0 > -3$: *ogni numero negativo è minore di 0.*



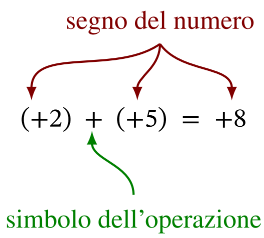
2.4 Le operazioni con i numeri relativi

Con i numeri relativi anche la sottrazione (oltre all'addizione e alla moltiplicazione) è un'operazione interna cioè la differenza di due numeri relativi è un numero relativo.

Addizione in $\mathbb{Z}$: $(\mathbb{Z};\ +)$

Il simbolo "+" ha ora due significati completamente diversi:

- simbolo dell'addizione
- segno del numero



Dal contesto dobbiamo capire se + è un segno del numero o è un simbolo di operazione.
All'inizio è bene usare una scrittura del tipo $(+2)+(+5)$ per indicare la somma tra i numeri $+2$ e $+5$; in seguito vedremo come semplificare la scrittura (e complicare l'interpretazione).

La procedura per addizionare due numeri relativi dipende dal segno dei due addendi.

Definizione 2.6 (Somma di numeri concordi): *La* somma di due numeri concordi *è il numero che ha per valore assoluto la* somma *dei valori assoluti e come segno lo stesso segno degli addendi.*

Esempio 2.5: $(+3) + (+5) = \ldots$: *i due numeri da sommare sono concordi, il loro segno è "+", i loro valori assoluti sono 3 e 5, la loro somma è 8. Pertanto* $(+3) + (+5) = +8$

Esempio 2.6: $(-2) + (-5) = \ldots$: *i due numeri sono entrambi negativi, quindi sono concordi, i loro valori assoluti sono 2 e 5, la somma ha valore assoluto 7, il segno è "−". Pertanto*

$$(-2) + (-5) = -7.$$

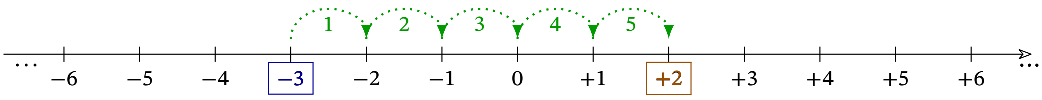
Definizione 2.7 (Somma di numeri discordi): *La* somma di due numeri discordi *è il numero che ha per valore assoluto la* differenza *dei valori assoluti e come segno il segno del numero che ha valore assoluto maggiore.*

Esempio 2.7: $(-5) + (+2) = \ldots$*: i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è* -5*, pertanto il risultato ha lo stesso segno di* -5*, cioè è negativo. In definitiva* $(-5) + (+2) = -3$

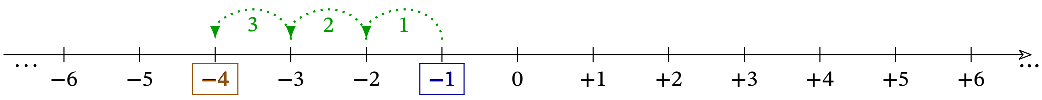
Esempio 2.8: $(+3) + (-7) = \ldots$*: i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 3 e 7, la loro differenza è 4, il numero che ha valore assoluto maggiore è* -7*, quindi il risultato ha segno negativo. In definitiva* $(+3) + (-7) = -4$

L'addizione si può rappresentare nella retta dei numeri come l'azione di partire dal punto indicato dal primo operando e muoversi nel verso indicato dal segno del secondo addendo: se è positivo ci si muove nel verso della retta, se è negativo ci si muove verso contrario.

$$(-3) + (+5) = 2$$



$$(-1) + (-3) = -4$$



Proprietà dell'addizione in $\mathbb{Z}$

L'addizione in $\mathbb{Z}$ può essere vista come una funzione che ha per argomenti numeri interi e dà come risultato un numero intero.

La struttura $(\mathbb{Z};\ +)$ presenta tutte le proprietà della struttura $(\mathbb{N};\ +)$ più un'importante proprietà: l'esistenza dell'elemento *inverso* di ogni numero intero. L'inverso rispetto all'addizione si chiama *opposto*. Riassumendo:

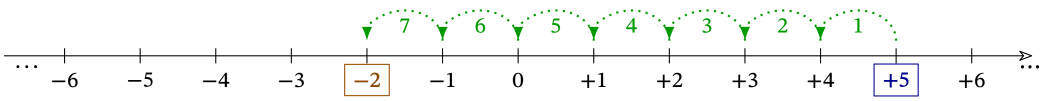
- è una *legge di composizione interna*;
- *Associativa*: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- *Elemento neutro è 0*: $a + 0 = 0 + a = a$;
- *Opposto*: per ogni a esiste un a' tale che $a + a' = a' + a = 0$;
- *Commutativa*: $a + b = b + a$.

Avendo queste proprietà, la struttura algebrica $(\mathbb{Z};\ +)$ viene chiamata *gruppo commutativo*.

Sottrazione in $\mathbb{Z}$: $(\mathbb{Z};\ -)$

La nuova proprietà dell'addizione (l'esistenza dell'opposto di ogni numero) trasforma la sottrazione in un'operazione interna agli interi. Una funzione che per qualunque coppia di argomenti interi dà come risultato un numero intero. Anzi, non solo la sottrazione si può sempre eseguire, ma addirittura …non servirà più! Ma andiamo con ordine.

$$(+5) - (+7) = -2 \quad \text{perché} \quad (-2) + (+7) = +5$$



> **Definizione 2.8 (Differenza in $\mathbb{Z}$):** *La differenza di due numeri relativi si ottiene aggiungendo al primo numero l'opposto del secondo.*
> $a - b = (+a) - (+b) = a + (-b)$ *perché:* $(+a) + (-b) + (+b) = a + 0 = a$

La funzione sottrazione è quindi definita per qualunque coppia ordinata di numeri relativi.

> **Esempio 2.9:** *Sottrazione di numeri relativi.*
>
> *(a)* $(+2) - (+3) = (+2) + (-3) = -1$
> *(b)* $(+3) - (-7) = (+3) + (+7) = +10$
> *(c)* $(-2) - (-1) = (-2) + (+1) = -1$
> *(d)* $(-5) - (+5) = (-5) + (-5) = -10$

Cambio la sottrazione in addizione

$$(+2)\ -\ (+3)\ =\ (+2)\ +\ (-3)$$

Cambio $+3$ con il suo opposto -3

Proprietà della sottrazione in $\mathbb{Z}$

Negli interi, la sottrazione è una legge di composizione interna e gode della proprietà invariantiva della sottrazione: la differenza di due numeri non cambia se al minuendo e al sottraendo viene aggiunto o tolto lo stesso numero.

Somma algebrica

Poiché la sottrazione può essere trasformata in addizione, si può semplificare la scrittura di addizione e sottrazione di numeri relativi utilizzando soltanto l'operazione di addizione e omettendo di scrivere il segno "+" dell'addizione. Questo tipo di addizione tra numeri relativi si chiama somma algebrica. Facciamolo passo passo:

$$(-5) - (-7) + (-2) + (+6) - (+3) + (-5) =$$

all'interno delle parentesi ci sono i segni dei numeri e, fuori, i simboli delle operazioni. Eliminiamo le sottrazioni trasformandole in addizioni con l'opposto del sottraendo:

$$(-5) + (+7) + (-2) + (+6) + (-3) + (-5) =$$

eliminiamo tutti i simboli di addizione e le parentesi:

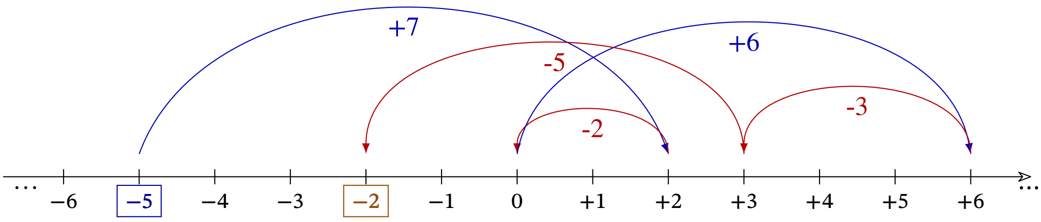
$$= -5 + 7 - 2 + 6 - 3 - 5 =$$

ottenendo così una somma algebrica dove i simboli di addizione sono sottintesi:

$$= -5 \quad \text{più} \quad +7 \quad \text{più} \quad -2 \quad \text{più} \quad +6 \quad \text{più} \quad -3 \quad \text{più} \quad -5 =$$

Ora possiamo risolverla andando in ordine:

1. sulla retta, partiamo da -5;
2. ogni volta che incontriamo un numero negativo ci spostiamo verso sinistra;
3. ogni volta che incontriamo un numero positivo ci spostiamo verso destra.



Cioè: parto da -5 avanti di 7 indietro di 2 avanti di 6 indietro di 3 indietro di 5.

Oppure, dato che l'addizione gode della proprietà commutativa e associativa, e qui abbiamo tutte addizioni, possiamo addizionare tutti i numeri positivi, tutti i numeri negativi e alla fine calcolare la somma dei due risultati:

$$-5+7-2+6-3-5 \quad = \quad +7+6-5-2-3-5 \quad = \quad +13-15 \quad = \quad -2$$

Esempio 2.10: *Calcola:* $(+1)+(-2)-(-10)+(+3)-(+13)-(-2)+(-3) =$

trasforma le sottrazioni: $= (+1)+(-2)+(+10)+(+3)+(-13)+(+2)+(-3) =$

sottintendo le addizioni: $= +1-2+10+3-13+2-3 =$

eseguo le addizioni: $= +15-15-3 = -3$

Una volta capito il meccanismo si possono riunire primi due passaggi, e se ci sono numeri opposti, la loro somma è nulla.

Esempio 2.11: *Calcola:* $(+13)+(-20)-(-60)+(+5)-(+13)-(-21)+(-60) =$

Trasformo in addizione algebrica e annullo i termini opposti:

$= \cancel{+13} - 20 \cancel{+60} + 5 \cancel{-13} + 21 \cancel{-60} =$

addiziono i termini rimasti: $= +26 - 20 = +6$

Moltiplicazione in $\mathbb{Z}$: $(\mathbb{Z};\ \times)$

Se dobbiamo moltiplicare due interi entrambi non negativi possiamo rifarci alla definizione data per la moltiplicazione tra naturali, ad esempio:

$$(+3)\cdot(+4) = 0 + (+3) + (+3) + (+3) + (+3) = +3 + 3 + 3 + 3 = +12$$

Possiamo fare riferimento alla stessa definizione anche nel caso il primo fattore sia negativo:

$$(-3)\cdot(+4) = 0 + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -3 - 3 - 3 - 3 = -12$$

Se il secondo fattore è negativo, non ha molto senso aggiungere un numero negativo di addendi! Possiamo però utilizzare la proprietà commutativa e risolvere il problema:

$$(+3)\cdot(-4) = (-4)\cdot(+3) = 0 + (-4) + (-4) + (-4) = -4 - 4 - 4 = -12$$

Il problema diventa più spinoso quando entrambi i fattori sono negativi.
Come calcolare $(-3)\cdot(-4)$?
Partiamo da un'altra proprietà della moltiplicazione: zero è l'elemento assorbente, cioè se moltiplico 0 per un qualunque numero, il risultato sarà 0. Quindi: $0\cdot(-4) = 0$.
Ma zero possiamo scriverlo anche come somma di due numeri opposti: $0 = (+3) + (-3)$.
Sostituiamo 0: $((+3) + (-3))\cdot(-4) = 0$.
Per la proprietà associativa: $(+3)\cdot(-4) + (-3)\cdot(-4) = 0$.
Il primo dei due prodotti l'abbiamo già calcolato: $(-12) + (-3)\cdot(-4) = 0$.
Ma per ottenere 0, il prodotto deve essere l'opposto di -12 quindi: $(-3)\cdot(-4) = +12$.

È facile generalizzare quanto visto in questo caso particolare e mostrare che se vogliamo che valgano le consuete proprietà delle operazioni, il prodotto di due numeri negativi deve essere un numero positivo.

Possiamo sintetizzare quanto visto nella seguente

Definizione 2.9 (Prodotto di numeri relativi): *Il* prodotto di due numeri interi relativi *è 0 se uno dei due fattori è 0, altrimenti è il numero intero avente come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori e come segno il segno "+" se i fattori sono concordi, il segno "−" se i fattori sono discordi.*

Esempio 2.12: *Calcola i prodotti delle seguenti moltiplicazioni.*

a) $(+3)\cdot(-2) =$ *il prodotto dei valori assoluti è* $3\cdot 2 = 6$ *e i numeri sono discordi, quindi:* $(+3)\cdot(-2) = -6$.

b) $(-7)\cdot(+5) =$ *il prodotto dei valori assoluti è* $7\cdot 5 = 35$ *e i numeri sono discordi, quindi:* $(-7)\cdot(+5) = -35$.

c) $(-20)\cdot(-4) =$ *il prodotto dei valori assoluti è* $20\cdot 4 = 80$ *e i numeri sono concordi, quindi:* $(-20)\cdot(-4) = +80$.

d) $(+8)\cdot(+7) =$ *il prodotto dei valori assoluti è* $8\cdot 7 = 56$ *e i numeri sono concordi, quindi:* $(+8)\cdot(+7) = +56$.

e) $(+8)\cdot(0) = +8$ *e* 0 *non sono né concordi né discordi dato che 0 non è né positivo né negativo, ma il prodotto di un numero per 0 è sempre 0.*

Per determinare il segno di un prodotto si può ricorrere alla seguente regola dei segni: nella prima riga e nella prima colonna sono collocati i segni dei fattori, all'incrocio tra la riga e la colonna c'è il segno del risultato.

×	+	−
+	+	−
−	−	+

Nel caso si debbano eseguire più moltiplicazioni il segno del prodotto è negativo se il segno meno è presente in un numero dispari di fattori mentre se il segno negativo è presente un numero pari di volte il prodotto è positivo.

Proprietà della moltiplicazione in $\mathbb{Z}$

La moltiplicazione in $\mathbb{Z}$ può essere vista come una funzione che ha per argomenti numeri interi e dà come risultato un numero intero.

La struttura $(\mathbb{Z}; \times)$ presenta le stesse proprietà della struttura $(\mathbb{N}; \times)$. Riassumendo:

- è una *legge di composizione interna*;
- *Associativa*: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$;
- *Elemento neutro è 1*: $a \times 1 = 1 \times a = a$;
- *Commutativa*: $a \times b = b \times a$.

Avendo queste proprietà, la struttura algebrica $(\mathbb{Z}; \times)$ viene chiamata *monoide commutativo*.

Anche nell'insieme dei numeri interi vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto l'addizione.

Poiché negli interi valgono queste proprietà, la struttura formata dagli interi, dall'addizione e dalla moltiplicazione, $(\mathbb{Z}; +; \times)$, viene chiamata *anello*.

Nell'anello degli interi, possiamo sempre risolvere equazioni del tipo: $x + a = 0$, ma equazioni del tipo $ax + b = 0$ non hanno sempre soluzione se a, x e b, sono numeri interi.

Divisione in $\mathbb{Z}$: $(\mathbb{Z}; :)$

La regola della divisione è del tutto analoga a quella della moltiplicazione.

Definizione 2.10 (Quoziente di numeri interi relativi): *Il* quoziente esatto di due numeri interi relativi *è il numero intero, se esiste, avente come valore assoluto il quoziente esatto dei valori assoluti e come segno il segno "+" se i due numeri sono concordi, il segno "−" se i due numeri sono discordi.*

Osserva che mentre addizione, sottrazione e moltiplicazione sono operazioni interne ai numeri interi relativi, ossia il risultato di queste operazioni è sempre un numero intero relativo, il risultato della divisione esatta non sempre è un numero intero relativo. La divisione tra numeri relativi è possibile solo se è possibile la divisione esatta tra i loro valori assoluti, ossia se il divisore è diverso da zero e il dividendo è un suo multiplo.

Esempio 2.13: *Calcola i quozienti esatti delle seguenti divisioni.*

a) $(+8) : (+2) =$ *il quoziente dei valori assoluti è* $8 : 2 = 4$ *e i numeri sono concordi, quindi:* $(+8) : (+2) = +4$.

b) $(+15) : (-3) =$ *il prodotto dei valori assoluti è* $15 : 3 = 5$ *e i numeri sono discordi, quindi:* $(+15) : (-3) = -5$.

c) $(-36) : (-4) =$ *il prodotto dei valori assoluti è* $36 : 4 = 9$ *e i numeri sono concordi, quindi:* $(-36) : (-4) = +9$.

d) $(+8) : (+7) =$ *non ha un quoziente esatto intero.*

e) $(+8) : (0) =$ *non è definito.*

Proprietà della divisione in $\mathbb{Z}$

Negli interi, la divisione non è una legge di composizione interna, comunque, se dà un risultato intero, e gode della proprietà invariantiva della divisione: il quoziente di due interi non cambia se dividendo e divisore si moltiplicano o si dividono per uno stesso valore diverso da zero.

Potenza in $\mathbb{Z}$: $(\mathbb{Z};\ \uparrow)$

Ampliando la potenza ai numeri interi distinguiamo i due casi di potenza con base intera e esponente naturale e di base intera e esponente intero.

Base in $\mathbb{Z}$ e esponente in $\mathbb{N}$

In questo caso la definizione di potenza per un numero relativo è la stessa di quella data per i numeri naturali. Se base e esponente non sono entrambi 0, la potenza si ottiene moltiplicando $+1$ per tanti fattori uguali alla base quante volte è indicato dall'esponente.

Ricordiamo che un qualsiasi numero, diverso da 0, elevato a 0 dà come risultato il numero 1 e che qualsiasi numero elevato a 1 rimane invariato.

L'unica attenzione che dobbiamo avere è quella relativa al segno:

- se la base è un numero positivo il risultato della potenza sarà sempre positivo;
- se la base è un numero negativo il segno dipende dall'esponente:
  - se l'esponente è dispari il risultato è un numero negativo,
  - se l'esponente è pari il risultato è un numero positivo.

Esempio 2.14: *Potenze di numeri relativi.*

- $(-3)^0 = 1$
- $(+5)^0 = 1$
- $(-2)^1 = -2$
- $(+7)^1 = +7$
- $(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = +9$
- $(+3)^3 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +27$
- $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
- $(-2)^4 = +16$
- $(-2)^5 = -32$
- $(-1)^6 = +1$
- $(-1)^7 = -1$

Base in $\mathbb{Z}$ e esponente in $\mathbb{Z}^-$

Abbiamo visto come trattare potenze con base negativa, ma ha un senso una potenza con esponente negativo?

Ricordiamo la seconda proprietà delle potenze: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Se $m > n$ otteniamo: $a^m : a^n = a^{m-n}$ dove $m - n$ è positivo situazione già trattata.

Se $m = n$ otteniamo giustamente: $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0 = 1$.

Se $m < n$ otteniamo: $a^m : a^n = a^{m-n}$ dove $m - n$ è un numero negativo: situazione nuova.

Riprendiamo la seconda proprietà delle potenze, ma questa volta consideriamo $m < n$:

$$a^{m-n} = a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1 \cdot \overbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}^{m \text{ volte}}}{1 \cdot \underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{m \text{ volte}} \cdot \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n-m \text{ volte}}} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Dato che $n - m = -(m - n)$ possiamo concludere che in generale:

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$$

Notiamo che queste uguaglianze sono valide se la base è diversa da zero.

Riassumendo, una potenza con base non nulla è uguale a una potenza che ha per base il reciproco della base e per esponente l'opposto dell'esponente. Questo ci permette di risolvere i casi in cui l'esponente è negativo.

Possiamo quindi ampliare la definizione di potenza.

Definizione 2.11 (Potenza in $\mathbb{Z}$): *Dati due numeri interi b e e,* non entrambi nulli,

- *Se $e \geqslant 0$: l'operazione di* potenza *associa un terzo numero p che si ottiene moltiplicando 1 per e fattori uguali a b:*

  $$\text{Se } b = 0 \text{ e } e = 0 \quad b^e \text{ non è definita} \qquad \text{altrimenti } b^e = 1 \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{e \text{ volte}} = p$$

- *Se $e < 0$ e $b \neq 0$: l'operazione di* potenza *associa un terzo numero p che si ottiene elevando il reciproco della base all'opposto dell'esponente:*

  $$\text{Se } b = 0 \text{ e } e < 0 \quad b^e \text{ non è definita} \qquad \text{altrimenti } b^e = \frac{1}{1 \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{-e \text{ volte}}} = p$$

Esempio 2.15: *La successione delle potenze di 2 con esponente intero:*

$$\dots; \quad 2^{-3} = \frac{1}{8}; \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}; \quad 2^{-1} = \frac{1}{2}; \quad 2^{0} = 1; \quad 2^{+1} = 2; \quad 2^{+2} = 4; \quad 2^{+3} = 8; \quad \dots$$

Proprietà della potenza in $\mathbb{Z}$

Con i numeri interi la potenza non è una legge di composizione interna: come visto nell'esempio precedente, un numero intero elevato a un numero intero in certi casi dà, come risultato, un numero non intero.

2.5 Esercizi

Esercizi dei singoli paragrafi

2.3 Confronto di numeri relativi

2.1. *Riscrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) i seguenti numeri relativi:*

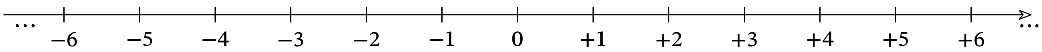
$$+11 \qquad -3 \qquad 0 \qquad +2 \qquad -5 \qquad -7 \qquad +1$$

2.2. *Riscrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo) i seguenti numeri relativi:*

$$-5 \qquad -2 \qquad +3 \qquad -1 \qquad 0 \qquad +7 \qquad -9 \qquad +13 \qquad -21$$

2.3. *Disponi sulla retta degli interi i seguenti numeri relativi:*

$$-3; \quad +2; \quad +5; \quad -7; \quad -5; \quad -1; \quad +3$$



2.4. *Per ciascuno dei seguenti numeri relativi scrivi il valore assoluto.*

(a) $|+3| = \ldots$
(b) $|-5| = \ldots$
(c) $|-1| = \ldots$
(d) $|+10| = \ldots$
(e) $|-11| = \ldots$
(f) $|+7| = \ldots$

2.5. *Scrivi tra le seguenti coppie di numeri relativi il simbolo corretto tra “$>$” e “($<$)”.*

(a) $-5 \ldots -2$
(b) $-3 \ldots +5$
(c) $-2 \ldots +2$
(d) $-5 \ldots 0$
(e) $-3 \ldots -5$
(f) $-1 \ldots +1$
(g) $+3 \ldots -3$
(h) $-1 \ldots -5$
(i) $0 \ldots +1$
(j) $+3 \ldots 0$
(k) $0 \ldots -2$
(l) $+7 \ldots +2$
(m) $-11 \ldots -101$
(n) $+100 \ldots -99$
(o) $-101 \ldots +110$

2.4 Le operazioni con i numeri relativi

2.6. *Esegui le seguenti addizioni di numeri relativi.*

(a) $(+3) + (+2) =$
(b) $(-5) + (-5) =$
(c) $(-3) + (+5) =$
(d) $(+12) + (+2) =$
(e) $(-2) + (-3) =$
(f) $(-3) + (+13) =$
(g) $(+10) + (-5) =$
(h) $(+1) + (+1) =$
(i) $(-10) + 0 =$

2.7. *Esegui le seguenti sottrazioni di numeri relativi.*

(a) $(-1) - (+2) =$
(b) $(-5) - (+3) =$
(c) $(-2) - (+5) =$
(d) $(+12) - (+2) =$
(e) $(+1) - (-3) =$
(f) $(-3) - (+1) =$
(g) $(+11) - (-5) =$
(h) $(+21) - (+11) =$
(i) $(-1) - 0 =$
(j) $(-3) - (+4) =$
(k) $(+7) - (-2) =$
(l) $(-3) - (-3) =$
(m) $0 - (-11) =$
(n) $(-6) - (-6) =$
(o) $(+5) - (-5) =$

2.8. *Completa la seguente tabella.*

a	b	$a-b$	$+a-b$	$-a+b$	$-a-b$
-1	$+2$	-3	-3	$+3$	-1
$+2$	$+3$				
$+1$	0				
-2	-3				
$+3$	-3				
-10	$+4$				

2.9. *Completa la seguente tabella.*

a	b	$a-b$	$-(a-b)$	$-a+b$	$-a-(-b)$
-8	$+2$				
$+6$	$+3$				
$+7$	-4				
-5	-9				
$+2$	0				
-8	$+6$				

2.10. *Completa la seguente tabella.*

a	b	c	$a-b+c$	$(a-b)+c$	$a+(-b+c)$	$a-(+b+c)$
-1	$+2$	-3				
$+2$	$+3$	-5				
$+1$	0	-1				
-5	-3	$+4$				
$+7$	-7	$+7$				
-11	0	$+4$				

2.11. *Esegui le seguenti somme algebriche.*

(a) $+3-1=$ $+2$
(b) $+2-3=$
(c) $-5+2=$
(d) $-2+2=$
(e) $-5-2=$
(f) $-3+5=$
(g) $+8-0=$
(h) $-9+0=$
(i) $0-5=$
(j) $+1-1=$
(k) $-2-2=$
(l) $+9-3=$
(m) $+7-6=$
(n) $-101+9=$
(o) $-10+5=$
(p) $+7-17=$

2.12. *Trasforma in somme algebriche, e poi calcola, le seguenti espressioni.*

(a) $(+9)-(+5)+(+6)-(+2)+(+9)=$ [17]
(b) $(+10)+(-10)+(+7)+(-8)+(+9)=$ [8]
(c) $(+12)+(-3)+(+8)-(+6)-(+7)-(+0)=$ [4]
(d) $(-1)-(-1)+(-6)-(+11)-(+2)-(-8)=$ [−11]
(e) $(+3)-(-8)+(+4)+(-12)+(-6)+(-5)=$ [−8]
(f) $(-12)-(+11)+(-6)-(+8)+(-12)+(+9)=$ [−40]
(g) $(-9)+(-6)+(+10)-(-12)+(+2)-(+9)=$ [0]
(h) $(+6)+(+6)+(-4)+(+5)-(-2)-(-11)+(-2)=$ [24]
(i) $(+6)+(+9)+(-4)+(-4)-(+2)-(+5)-(-11)=$ [11]
(j) $(+3)+(+0)+(+9)+(+0)+(-3)-(+7)-(+5)=$ [−3]
(k) $(+7)-(+4)-(-11)+(-5)+(-2)+(+6)+(+2)=$ [15]
(l) $(+8)+(-10)+(+12)+(-3)-(-9)-(+9)+(-12)=$ [−5]
(m) $(-3)+(+12)-(-7)+(-11)-(-1)-(-10)-(+3)=$ [13]
(n) $(-1)+(-9)-(-10)-(+8)+(-2)+(-2)+(-4)=$ [−16]
(o) $(-4)-(+0)+(-6)+(-4)+(+8)-(-11)-(-3)=$ [8]
(p) $(-6)-(+9)-(-11)+(-2)-(-1)-(+5)+(+5)=$ [−5]
(q) $(-4)+(+4)-(-8)-(+0)+(-4)-(-2)-(-5)=$
(r) $(+4)-(+9)-(-2)+(+3)+(-1)+(+9)+(-8)-(+10)=$ [−10] [11]
(s) $(+0)-(+7)+(-3)+(+5)+(-2)-(-4)+(+7)-(-3)=$ [7]
(t) $(+11)-(+8)+(+10)-(-7)+(+0)-(-6)-(+10)-(+1)=$ [15]
(u) $(+0)+(-6)+(-9)+(-10)+(+2)-(-5)+(+2)+(+10)=$ [−6]

2.13. *Calcola i seguenti prodotti.*

(a) $(+3)\cdot(-2)=-\ldots$
(b) $(-5)\cdot(-2)=+\ldots$
(c) $(+2)\cdot(+4)=\ldots 8$
(d) $(+1)\cdot(-1)=\ldots 1$
(e) $(+3)\cdot 0=\ldots\ldots$
(f) $(-2)\cdot(-2)=\ldots\ldots$
(g) $0\cdot(-3)=\ldots\ldots$
(h) $(-2)\cdot(+2)=\ldots\ldots$
(i) $(+10)\cdot(-1)=\ldots$
(j) $(+3)\cdot(+1)=$
(k) $(+1)\cdot(-2)=$
(l) $(+3)\cdot(-3)=$
(m) $(-5)\cdot(-1)=$
(n) $(+3)\cdot(-3)=$
(o) $(-2)\cdot(+5)=$
(p) $(-1)\cdot(-7)=$
(q) $(+3)\cdot(+11)=$
(r) $(+1)\cdot(-10)=$
(s) $(-4)\cdot(+3)=$
(t) $(+5)\cdot(-6)=$
(u) $(-3)\cdot(-2)=$

2.14. *Completa la seguente tabella.*

a	b	$a\cdot b$	$-a\cdot b$	$(-a)\cdot(-b)$	$-(a\cdot b)$
-7	$+2$				
$+5$	$+1$				
$+6$	-3				
-8	-9				
0	-4				
-10	$+12$				

2.15. *Completa la seguente tabella.*

a	b	$(a+b)\cdot(a-b)$	$(a+b)\cdot(a+b)$	$(a-b)\cdot(a-b)$	$(a+b)\cdot(-a+b)$
-7	$+2$				
$+5$	$+1$				
$+6$	-3				
-4	-2				
0	-4				
-2	$+8$				

2.16. *Esegui le seguenti divisioni.*

(a) $(+4):(+2)=$
(b) $(+5):(-1)=$
(c) $(+6):(+2)=$
(d) $(+8):(-2)=$
(e) $(-8):(+4)=$
(f) $(-4):(+2)=$
(g) $(-10):(+5)=$
(h) $(+10):(-2)=$
(i) $(-12):(+6)=$

2.17. *Completa la seguente tabella.*

a	b	$a:b$	$-a:b$	$-(a:b)$	$a:-(b)$
-24	$+2$				
$+18$	$+1$				
$+48$	-3				
-18	-9				
0	-4				
-36	$+12$				

2.18. *Calcola il valore delle seguenti potenze.*

(a) $(+3)^2=$
(b) $(-1)^2=$
(c) $(+1)^3=$
(d) $(-2)^2=$
(e) $(-2)^3=$
(f) $(+2)^3=$
(g) $(-3)^0=$
(h) $(-3)^3=$
(i) $(-4)^1=$

2.19. *Applica le proprietà delle potenze.*

(a) $(-3)^2\cdot(-3)^3=(-3)^{\cdots}$
(b) $(-2)^4\cdot(-2)^5=(-2)^{\cdots}$
(c) $(-5)\cdot(-5)^2=(-5)^{\cdots}$
(d) $(-10)^2\cdot(-5)^2=(\ldots\ldots)^2$
(e) $(-3)^4:(-3)^2=(-3)^{\cdots}$
(f) $(-7)^3:(-7)^3=(-7)^{\cdots}$
(g) $(-2)^4:(-2)^2=(-2)^{\cdots}$
(h) $(-6)^4:(+2)^4=(\ldots\ldots)^4$
(i) $\left[(-3)^2\right]^3=(-3)^{\cdots}$
(j) $\left[(-5)^2\right]^3=(+5)^{\cdots}$
(k) $(-3)^3\cdot(+3)^3=\ldots$
(l) $(-8)^2:(-4)^2=\ldots$
(m) $\left[(-7)^2\right]^3:(-7)^3=\ldots$
(n) $\left[(-3)^3\right]^2:(-3)^4=\ldots$

2.20. *Completa la seguente tabella.*

a	b	a^b	$(-a)^b$	$(+a)^{-b}$	$(-a)^{-b}$
-7	$+2$				
-3	$+4$				
-3	$+3$				
-8	-2				
$+1$	$+5$				
-10	$+4$				

2.21. *Completa la seguente tabella.*

a	b	$(a+b)^2$	$(-a+b)^2$	$(+a-b)^2$	$(-a-b)^2$
-7	$+2$				
-3	$+4$				
-3	$+3$				
-8	-2				
$+1$	$+5$				
-10	$+4$				

2.22. *Completa la seguente tabella.*

a	a^2	$(-a)^2$	$-a^2$	a^3	$(-a)^3$
-2					
-1					
0					
$+1$					
$+2$					
$+3$					

2.23. *Completa la seguente tabella.*

a	b	c	$-2 \cdot a - b + c$	$-2 \cdot a - (b+c)$	$-a - 2 \cdot b + c$	$a - b - 2 \cdot c$
-1	$+2$	-3				
$+2$	$+3$	-5				
$+1$	0	-1				
-5	-3	$+4$				
$+7$	-7	$+7$				
-11	0	$+4$				

Esercizi riepilogativi

2.24. *In quali delle seguenti situazioni è utile ricorrere ai numeri relativi?*

(a) *misurare la temperatura;*
(b) *contare le persone;*
(c) *esprimere la data di nascita di un personaggio storico;*
(d) *esprimere l'età di un personaggio storico;*
(e) *indicare il saldo attivo o passivo del conto corrente;*
(f) *indicare l'altezza delle montagne e le profondità dei mari.*

2.25. *La somma di due numeri relativi è sicuramente positiva quando:*

$\boxed{A}$ *i due numeri sono concordi.*
$\boxed{B}$ *i due numeri sono discordi.*
$\boxed{C}$ *i due numeri sono entrambi positivi.*
$\boxed{D}$ *i due numeri sono entrambi negativi.*

2.26. *La somma di due numeri relativi è sicuramente negativa quando:*

$\boxed{A}$ *i due numeri sono concordi.*
$\boxed{B}$ *i due numeri sono discordi.*
$\boxed{C}$ *i due numeri sono entrambi positivi.*
$\boxed{D}$ *i due numeri sono entrambi negativi.*

2.27. *Il prodotto di due numeri relativi è positivo quando (più di una risposta possibile):*

$\boxed{A}$ *i due numeri sono concordi.*
$\boxed{B}$ *i due numeri sono discordi.*
$\boxed{C}$ *i due numeri sono entrambi positivi.*
$\boxed{D}$ *i due numeri sono entrambi negativi.*

2.28. *Il prodotto di due numeri relativi è negativo quando:*

$\boxed{A}$ *i due numeri sono concordi.*
$\boxed{B}$ *i due numeri sono discordi.*
$\boxed{C}$ *i due numeri sono entrambi positivi.*
$\boxed{D}$ *i due numeri sono entrambi negativi.*

2.29. *Quali delle seguenti affermazioni sono vere?*

(a) *ogni numero relativo è minore di zero* V F
(b) *la somma di due numeri discordi è zero* V F
(c) *il cubo di un numero intero relativo è sempre negativo* V F
(d) *la somma di due numeri opposti è nulla* V F
(e) *il quoziente di due numeri opposti è l'unità* V F
(f) *il quoziente di due numeri concordi è positivo* V F
(g) *il prodotto di due numeri opposti è uguale al loro quadrato* V F
(h) *il doppio di un numero intero negativo è positivo* V F
(i) *la somma di due interi concordi è sempre maggiore di ciascun addendo* V F
(j) *il quadrato dell'opposto di un intero è uguale all'opposto del suo quadrato* V F

2.30. *Inserisci l'operazione corretta per ottenere il risultato.*

(a) $(+2)\ldots(-1) = -2$
(b) $(-10)\ldots(+5) = -2$
(c) $(-18)\ldots(-19) = +1$
(d) $(+15)\ldots(-20) = -5$
(e) $(-12)\ldots(+4) = -3$
(f) $(-4)\ldots 0 = 0$
(g) $(+1)\ldots(+1) = 0$
(h) $(+5)\ldots(-6) = +11$
(i) $-8\ldots(-2) = +16$

2.31. *Inserisci il numero mancante.*

(a) $+5 + (\ldots\ldots) = -5$
(b) $-8 + (\ldots\ldots) = -6$
(c) $+7 - (\ldots\ldots) = 0$
(d) $0 - (\ldots\ldots) = -2$
(e) $+3 \cdot (\ldots\ldots) = -3$
(f) $-5 \cdot (\ldots\ldots) = 0$
(g) $(+16) : (\ldots\ldots) = -2$
(h) $(-6) : (\ldots\ldots) = -1$
(i) $(-10) : (\ldots\ldots) = +5$

2.32. *Scrivi tutti i numeri:*

(a) *interi relativi che hanno valore assoluto minore di 5;*
(b) *interi relativi il cui prodotto è* -12
(c) *interi negativi maggiori di* -5

2.33. *Inserisci "+" o "−" in modo da ottenere il numero più grande possibile:*

$$-3\ldots(-3)\ldots 3\ldots(-6).$$

2.34. *Inserisci le parantesi in modo da ottenere il risultato indicato.*

(a) $-5 \cdot +3 - 1 + 2 = -20$
(b) $-5 + 2 \cdot -1 + 2 = +5$
(c) $-5 + 7 - 3 \cdot 2 = +3$
(d) $-1 \cdot +3 - 5 \cdot -1 - 2 = +12$

2.35. *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

(a) $-5+7+4-9$

(b) $+1-1+1-1+1-1+1$

(c) $+1-2+3-4+5-6$

(d) $(-3+10)-(2-3)$

2.36. *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

(a) $(+5-2-1)+(+2+4+6)$ *[14]*

(b) $(-5+7-9)+(+1-2+3)-(+4-6+8)$ *[-11]*

(c) $+4-3-[+2-1-(8-3)-(-5-2)]-(2+3)$ *[-7]*

(d) $-2+(-5+1)+(-7+4)-2\cdot(-6+1)$ *[1]*

(e) $15-9\cdot(-14+12)+8\cdot(-3+6)+5\cdot(-3+1)$ *[47]*

2.37. *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

(a) $(50-36-25)\cdot(-15+5+20)-10\cdot(-3-7)$ *[-10]*

(b) $[+3-(10-5+25)]\cdot[-16+5-(-2-14)]:(9+6)$ *[-9]*

(c) $20:(+15-5)-30:(-10+5)+40:(15-20)$ *[0]*

(d) $18:(-3)+6\cdot[1-5\cdot(-2+4)+3]:(-6)$ *[0]*

2.38. *Calcola il valore delle seguenti espressioni e indica dove puoi applicare le proprietà delle potenze.*

(a) $100:2+3^2-2^2\cdot 6$ *[35]*

(b) $2^7:2^3-2^2$ *[12]*

(c) $30-5\cdot 3-7\cdot 2^2-2$ *[-15]*

(d) $(3^2+4^2)-(-3-4)^2$ *[-24]*

(e) $5\cdot 5^3\cdot 5^4:\left(5^2\right)^3+5$ *[30]*

(f) $32^5:16^4+(-2)^9$ *[0]*

(g) $\left(3^4\cdot 3^3:3^6\right)^2+(7^2-5^2):2^2$ *[15]*

(h) $\left(3\cdot 2^2-10\right)^4\cdot(3^3+2^3):7-10\cdot 2^3$ *[0]*

2.39. *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

(a) $-5\cdot(12-3+4)-2\cdot\left[3-16:(-2+4)\right]^2$ *[-115]*

(b) $\left[-3+(-5)\cdot(-1)\right]^3+\left[-4-(1-2)\right]^2$ *[17]*

(c) $\left[2\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)\cdot(-2)\right]^2:\left[2^4-3\cdot(+6)\right]^2$ *[225]*

(d) $\left[3\cdot(-1)^2-3\cdot(-3)\cdot(-3)\right]^3:\left[2^2+5\cdot(-2)^2\right]^3$ *[-1]*

2.40. *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

(a) $(-3)^2\cdot(4-1)^5:[(-4)^3:(2^5)-3^3:(-3)^3]$ *[-2187]*

(b) $[-(-2)\cdot 2+(-10)^2:(-5)^2]\cdot[3-5+2\cdot(-3)^2-5]$ *[88]*

(c) $13-3-4\cdot(-2)^2-5^3:5^2+3\cdot(2^3-3^2)-6:(-3)-(4-7+3)^4$ *[-12]*

(d) $-1-3\cdot(-3)^2-4^3:4^2+(-3-3)\cdot(2^2+3^2)-(-12):(-3)$ *[-114]*

2.41. *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

(a) $[10-6\cdot(-2)^2]:(-7)+(3^2:3)\cdot 2^3-15:(-3)+[(-3)^3:(-3)^0]$ *[4]*

(b) $|-5+8|-|-11|+(-|+4|\cdot|-2\cdot(+5)|)^2$ *[1592]*

(c) $(-29+37)^5\cdot(-5+|23-28|)^7$ *[0]*

(d) $-2\cdot(-2\cdot|-2|)^2-(|3-5|\cdot(3-5))^2\cdot(-2)$ *[0]*

(e) $(-1)^3\cdot(-1\cdot|-1|)^2-(|-3-2|\cdot(-5+3))^2\cdot(-2+1)^3$ *[99]*

2.42. *Traduci in una espressione matematica le seguenti frasi e motivane la verità o falsità:*

(a) *il cubo del quadrato di un numero diverso da zero è sempre positivo;*

(b) *il quadrato della somma di un nu-*

mero con il suo opposto è sempre positivo;

(c) *la differenza tra il triplo di 5 e l'unità è uguale all'opposto di 5;*

(d) *il prodotto tra il quadrato di un numero negativo e l'opposto dello stesso numero è uguale all'opposto del suo cubo.*

2.43. *Sottrarre dal cubo di* -3 *la somma dei quadrati di* $+2$ *e* -2 *Il risultato è?*

2.44. *Sottrarre dalla somma di* -15 *e* $+27$ *il prodotto di* -3 *e* $+7$.

2.45. *Aggiungere al prodotto di* -5 *e* $+3$ *la somma di* $+5$ *e* -10.

2.46. *Sottrarre dal prodotto di* $+7$ *e* $+4$ *la somma di* $+1$ *e* -8.

2.47. *Moltiplica la somma tra* -3 *e* $+3$ *con la differenza tra* $+3$ *e* -3

2.48. *Partendo dal pian terreno scendo di 15 gradini, salgo 12 gradini, scendo di 7 gradini e risalgo di 8. A che punto mi trovo rispetto al pian terreno?*

2.49. *Giocando a carte contro due avversari nella prima partita ho vinto 50 gettoni con il primo giocatore e perso 60 gettoni con il secondo giocatore, nella seconda partita ho perso 30 gettoni con il primo e vinto 10 gettoni con il secondo. Quanti gettoni ho vinto complessivamente?*

2.50. *Una lumaca sale su un muro alto 10 metri, di giorno sale di due metri ma di notte scende di un metro. In quanti giorni la lumaca arriva in cima al muro?*

2.51. *Il prodotto di due numeri interi relativi è* $+6$, *la loro somma è* -5. *Quali sono i due numeri?*

2.52. *Determina due numeri relativi aventi come prodotto* $+12$ *e come somma* -7.

2.53. *Determina due numeri relativi aventi come prodotto* $+12$ *e come somma* -7

2.54. *Determina due numeri relativi aventi come prodotto* $+2$ *e come somma* $+1$

2.55. *Determina due numeri relativi aventi come prodotto* $+10$ *e come somma* -3

2.56. *Determina due numeri relativi aventi come prodotto* $+14$ *e come somma* -9

2.57. *Determina due numeri relativi aventi come prodotto* -15 *e come somma* -8

somma +6

Numeri razionali 3

In questo capitolo incontrerai:

- i numeri razionali;
- la notazione decimale e numeri periodici;
- le frazioni;
- confronto tra frazioni e numeri decimali;
- notazione scientifica e ordine di grandezza;
- rapporti e percentuali e proporzioni;
- problemi con le frazioni;
- frazioni e antico Egitto.

3.1 I numeri razionali

Abbiamo visto che con i numeri interi, $\mathbb{Z}$, possiamo sempre eseguire 3 delle 4 operazioni aritmetiche: la divisione tra numeri interi non sempre è un intero. Per semplificarci la vita e non dover sempre distinguere i vari casi, vogliamo creare un insieme di numeri che contenga anche tutti i quozienti tra due numeri dell'insieme. Chiameremo questo insieme "Insieme dei numeri razionali" e lo indicheremo con il simbolo $\mathbb{Q}$.

Presi due numeri dell'insieme n e d, di cui il secondo diverso da zero, anche il loro quoziente deve appartenere allo stesso insieme:

$$\forall n,\ d \neq 0 \in \mathbb{Q} \ \Leftrightarrow \ n : d \in \mathbb{Q}$$

Cioè la funzione *divisione esatta* dovrà essere definita per ogni dividendo e per ogni divisore diverso da 0.

Abbiamo visto che per passare dai Naturali agli Interi è bastato aggiungere un segno ai numeri (e rivedere le varie regole per il confronto e le operazioni). Per ottenere i Razionali le cose non sono così semplici: abbiamo diversi modi di rappresentare lo stesso numero razionale e dovremo a seconda dei casi scegliere quello più comodo.

3.2 Notazione decimale

Vediamo per prima la notazione decimale, quella che usa la virgola per separare la parte intera del numero dalla sua parte decimale.

> **Osservazione 3.1:** *Nei paesi anglosassoni si usa il punto al posto della virgola. La tua calcolatrice presenta i numeri in italiano o in americano?*

Riprendiamo la divisione intera presentata nel paragrafo sulla divisione del capitolo sui numeri naturali. Ma questa volta lo abbreviamo un po': il risultato della moltiplicazione viene tolto al volo dal dividendo e viene scritto direttamente il nuovo resto.

```
M C D U
4 3 4 7, | 3 5
  8 4    | 1 2 4, 2
  1 4 7    C D U  d
      7 0
        0
```

La filastrocca di questa divisione è:
Il 35 nel 43 ci sta 1 volta, scrivo 1 con il resto di 8; riporto il 4.
Il 35 nel 84 ci sta 2 volte, scrivo 2; 2 per 35 fa 70 all'84: 14; riporto il 7.
Il 35 nel 147 ci sta 4 volte, scrivo 4; 4 per 35 fa 140 al 147: 7.

A questo punto scrivo la virgola nel quoziente parziale e aggiungo uno 0 al resto parziale e riprendo la filastrocca: Il 35 nel 70 ci sta 2 volte, scrivo 2; 2 per 35 fa 70 al 70: 0.
Questa volta ho ottenuto come resto 0 e l'algoritmo della divisione si ferma.

Proviamo con un altro esempio: $1523 : 7 =$

Il 7 nel 15 ci sta 2 volte. Scrivo 2 come prima cifra del quoziente. 2 per 7 uguale 14, al 15: 1. Scrivo 1 sotto al 5 e riporto il 2.
Il 7 nel 12 ci sta 1 volta. Scrivo 1 come seconda cifra del quoziente. 1 per 7 fa 7, al 12: 5. Scrivo 5 sotto al 2 e riporto il 3.
Il 7 nel 53 ci sta 7 volte. Scrivo 7 come terza cifra del quoziente. 7 per 7 fa 49, al 53: 4. Scrivo 4 sotto al 3.

```
M C D U d c m
1 5 2 3,      | 7
  1 2         | 2 1 7, 5 7 1 4 6 8
    5 3         C D U  d c m
      4 0
        5 0
          1 0
            3 0
              2 0
                6 0
                  4
```

A questo punto nella divisione intera ci eravamo fermati, ora invece aggiungiamo 0 decimi a destra di 4 e calcoliamo quanti decimi di 7 sono contenuti in 40 decimi e con quale resto e procediamo così continuando ad aggiungere zeri e procedendo sempre con le stesse operazioni. Potremmo avere l'impressione che questo "algoritmo" non termini mai. Ed è proprio così!

L'algoritmo della divisione può fermarsi producendo ad un certo punto il resto 0, oppure andare avanti all'infinito. Ma siamo sicuri che la seconda divisione che abbiamo visto non si fermi mai? Magari dopo 200 cifre decimali potrebbe avere resto 0? Prova a calcolare qualche altra cifra decimale ….

Puoi osservare che dopo il resto 4 ci sarà senz'altro il resto 5 e dopo di sicuro il resto 1 e poi 3, poi 2, poi 6, poi 4, poi 5, poi …Ma se le cose stanno così anche le cifre decimali si ripeteranno sempre allo stesso modo, quindi:

$$1523 : 7 = 217{,}571468571468571468571468571468\ldots = 217{,}\overline{571468} = 217,(571468)$$

I numeri di questo tipo si chiamano numeri periodici e si possono rappresentare scrivendo il periodo una sola volta *soprassegnato* o *posto tra parentesi*.

In definitiva:

Definizione 3.1: *Un* numero razionale *può essere scritto come* numero decimale limitato *o come* numero decimale periodico.

Quindi i numeri decimali, limitati o periodici ci permettono di rappresentare tutti i possibili risultati delle divisioni.

Perfetto! Perfetto? Mah …

Durante la scuola primaria abbiamo imparato ad eseguire le operazioni con i numeri decimali, ma solo con i numeri decimali limitati. Come sommare o moltiplicare tra di loro due numeri decimali periodici? È un bel problema.

3.3 Frazioni

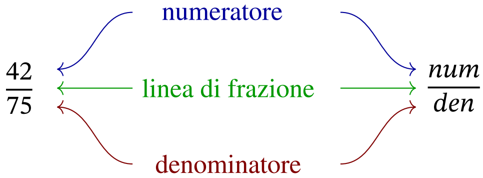
Un altro modo per rappresentare i risultati della divisione è geniale perché permette di ottenere il risultato della divisione senza eseguirla. Ad esempio se vogliamo dividere 100 in 23 parti uguali basta applicare l'algoritmo della divisione. Prova a farlo prima di procedere con la lettura.

Il risultato è: $100 \div 23 = 4{,}\overline{3478260869565217391304}$

Lo stesso risultato si può ottenere inventando un nuovo modo di rappresentare il risultato della divisione: $100 \div 23 = \dfrac{100}{23}$

E dividere 42 per 75? $42 \div 75 = \dfrac{42}{75}$ Fatto!

L'oggetto matematico: $\dfrac{42}{75}$ si chiama frazione ed è composto da tre parti: *numeratore*, *linea di frazione*, *denominatore*.



Questo nuovo oggetto matematico ci permette di evitare, in molti casi, l'esecuzione dell'algoritmo della divisione.

Ma dobbiamo risolvere alcuni altri problemi…Se una frazione rappresenta un *numero* (razionale) dobbiamo imparare a fare, con le frazioni, quello che sappiamo fare con i numeri:

- confrontare;
- eseguire operazioni.

Prima di affrontare questi due temi, però, applichiamo alle frazioni un'importante proprietà delle divisioni.

Osservazione 3.2: *Dalle regole dei segni della divisione consegue un'importante osservazione riguardo l'uso dei segni nelle frazioni:*

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad e \quad +\frac{a}{b} = \frac{+a}{+b} = \frac{-a}{-b}$$

Rappresentazione mista

Consideriamo la frazione $\frac{3}{3}$. Dividere qualcosa in tre parti e poi prenderle tutte e tre significa prenderla tutta: tre terzi significa un intero. E quattro terzi? Quattro terzi significa un intero più un terzo.

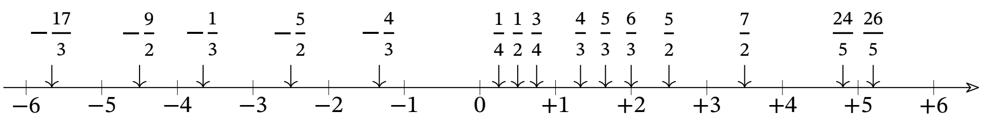
Ogni frazione può essere scritta in forma *mista* cioè nella somma di una parte intera più una frazione minore di uno. Vediamo alcuni esempi:

$$\frac{4}{3} = 1+\frac{1}{3}; \quad \frac{5}{3} = 1+\frac{2}{3}; \quad \frac{6}{3} = 2+\frac{0}{3}; \quad \frac{5}{6} = 0+\frac{5}{6}; \quad \frac{7}{2} = 3+\frac{1}{2}; \quad -\frac{8}{5} = -\left(1+\frac{3}{5}\right);$$

Rappresentazione sulla retta

È possibile rappresentare i numeri razionali su un asse cartesiano. Una retta dotata di verso e unità di misura permette di associare ad ogni numero razionale un preciso punto.

Alcuni esempi:



Teorema 3.1: *Tra due numeri razionali diversi esiste sempre almeno un altro numero razionale.*

Infatti nei numeri razionali è sempre possibile calcolare la media tra due numeri e se questi sono diversi tra loro, la media è maggiore del più piccolo e minore del più grande.

Corollario 3.2: *Tra due numeri razionali diversi esistono infiniti altri numeri razionali.*

Le affermazioni precedenti si riassumono dicendo che:

Definizione 3.2: *L'insieme dei numeri razionali è* denso.

Frazioni equivalenti

La divisione $42 \div 75$ dà come risultato 0,56, ma, per la proprietà invariantiva della divisione, otteniamo lo stesso risultato anche moltiplicando o dividendo il dividendo e il divisore per uno stesso numero **diverso da zero**:
$42 \div 75 = 84 \div 150 = 14 \div 25$. Per come abbiamo definito le frazioni discende immediatamente che:

$$\frac{42}{75} = \frac{84}{150} = \frac{14}{25}$$

Osservazione 3.3: *Attenzione al simbolo: = usato sopra: non significa che le due frazioni sono uguali, ma che, pur essendo diverse, rappresentano lo stesso numero razionale. Sono due nomi diversi per lo stesso numero.*

In generale: moltiplicando il numeratore e il denominatore per uno stesso numero **diverso da zero** ottengo una frazione diversa ma che rappresenta lo stesso numero razionale:

$$\forall n \neq 0 \quad \frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a \div n}{b \div n}$$

Definizione 3.3 (Frazioni equivalenti): *Due frazioni si dicono* equivalenti *se rappresentano lo stesso numero razionale.*

Osservazione 3.4: *Dato che ci sono infinite frazioni che rappresentano lo stesso numero razionale, in generale conviene usare come rappresentante di quel numero, la frazione che ha numeratore e denominatore più piccoli questa frazione si dice* ridotta ai minimi termini.
Una frazione si riduce ai minimi termini dividendo numeratore e denominatore per tutti i divisori comuni o dividendo numeratore e denominatore per il loro Massimo Comune Divisore.

Esempio 3.1: *Riduci ai minimi termini la frazione* $\dfrac{420}{360}$
Primo metodo:

$$\frac{\cancel{420}^{42}}{\cancel{360}_{36}} = \frac{\cancel{42}^{21}}{\cancel{36}_{18}} = \frac{\cancel{21}^{7}}{\cancel{18}_{6}} = \frac{7}{6}$$

Oppure, scoperto che il MCD $(420;\ 360) = 60$ *dividendo sia il numeratore sia il denominatore per 60:*

$$\frac{\cancel{420}^{7}}{\cancel{360}_{6}} = \frac{7}{6}$$

Un altro modo per ridurre ai minimi termini una frazione consiste nello scomporre in fattori primi il numeratore e il denominatore.

Esempio 3.2: *Riduci ai minimi termini la frazione* $\dfrac{420}{360}$

$$\frac{420}{360} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{7}{2 \cdot 3} = \frac{7}{6}$$

A volte, invece, non siamo interessati a trovare le frazioni ridotte ai minimi termini, ma, ad esempio, frazioni equivalenti che abbiano lo stesso denominatore.

Esempio 3.3: *Date due frazioni a e b, trova due frazioni, equivalenti, con lo stesso denominatore.*

1. $a = \frac{5}{6}, \quad b = \frac{3}{2}$: $\qquad a' = \frac{5}{4}, \quad b' = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4}$
2. $a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{9}$: $\qquad a' = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9}, \quad b' = \frac{1}{9}$
3. $a = \frac{5}{7}, \quad b = \frac{1}{4}$: $\qquad a' = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{20}{28}, \quad b' = \frac{1 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{7}{28}$

Osservazione 3.5: *Date due frazioni qualsiasi posso sempre trovarne due equivalenti che abbiano lo stesso denominatore (o numeratore):*

$$\textit{Date due frazioni: } \frac{a}{b} \quad e \quad \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \quad e \quad \frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$$

Dall'osservazione precedente si ricava un criterio semplice per vedere se due frazioni sono equivalenti:

Definizione 3.4: *Due frazioni sono* equivalenti *se il prodotto del numeratore della prima per il denominatore della seconda è uguale al prodotto del denominatore della prima per il numeratore della seconda (*prodotto incrociato*).*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Confronto di frazioni

Definizione 3.5: *Nel confronto tra due frazioni:*

- *Tra due frazioni che hanno lo stesso denominatore è maggiore quella che ha il numeratore maggiore:* $\frac{a}{b} \lessgtr \frac{c}{b}$ *se* $a \lessgtr c$.
- *Tra due frazioni che hanno lo stesso numeratore è maggiore quella che ha il denominatore minore:* $\frac{a}{b} \lessgtr \frac{a}{d}$ *se* $b \gtrless d$.
- *Se le frazioni non hanno né denominatore né numeratore uguali, possiamo confrontare due frazioni equivalenti a queste con lo stesso denominatore (o numeratore).*
- *In generale:* $\frac{a}{b} \lessgtr \frac{c}{d}$ *se* $ad \lessgtr cb$.

Esempio 3.4: *Stabilisci perché sono vere le seguenti proposizioni:*

1. $\frac{4}{12} = \frac{5}{15}$ *perché* $4 \cdot 15 = 5 \cdot 12$
2. $-\frac{12}{7} > -\frac{15}{7}$ *perché* $-12 > -15$ *o perché* $-12 \cdot 7 > -15 \cdot 7$
3. $\frac{6}{5} > \frac{6}{10}$ *perché* $5 < 10$ *o perché* $6 \cdot 10 > 5 \cdot 10$
4. $\frac{7}{8} < \frac{5}{4}$ *perché* $\frac{7}{8} < \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ *o perché* $7 \cdot 4 < 5 \cdot 8$

Operazioni con le frazioni

Addizione algebrica

L'addizione algebrica è l'operazione più complicata da effettuare con le frazioni.

Se due frazioni hanno lo stesso denominatore la loro somma è semplice da trovare:

Definizione 3.6: *La somma di due frazioni che hanno lo stesso denominatore è una frazione che ha per denominatore lo stesso denominatore e per numeratore la somma dei numeratori:*

$$\frac{a}{c} \mp \frac{b}{c} = \frac{a \mp b}{c}$$

Se le due frazioni non hanno lo stesso denominatore, si sommano due frazioni equivalenti con lo stesso denominatore. Spesso, invece di adoperare la moltiplicazione incrociata per eseguire l'addizione, si riducono le due frazioni allo stesso denominatore, usando il minimo comune multiplo: questo permette di ridurre notevolmente i calcoli.

$$\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d} \quad = \quad \frac{ad}{bd} \mp \frac{bc}{bd} = \frac{ad \mp bc}{bd}$$

$\times d$ $\times b$

$\times d$ $\times b$

Esempio 3.5: *Calcola* $\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$

Primo metodo *Usiamo il metodo della moltiplicazione incrociata:*

$$\frac{5}{12} - \frac{7}{18} = \frac{5 \cdot 18 - 7 \cdot 12}{12 \cdot 18} = \frac{90 - 84}{216} = \frac{\cancel{6}^{\,1}}{\cancel{216}_{\,36}} = \frac{1}{36}$$

Se invece di usare un multiplo qualsiasi dei denominatori, si usa il mcm, i calcoli possono ridursi.

Procedura 3.1 (Somma di frazioni):

1. *scomporre i denominatori in fattori primi;*
2. *scrivere le frazioni come un'unica frazione che ha per denominatore il* mcm*;*
3. *eseguire le operazioni.*

Esempio 3.6: *Calcola* $\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$
Il numero apposto ai vari passaggi fa riferimento alla procedura appena descritta.

$$\frac{5}{12} - \frac{7}{18} \overset{1}{=} \frac{5}{2^2 \cdot 3} - \frac{7}{2 \cdot 3^2} \overset{2}{=} \frac{5 \cdot 3 - 7 \cdot 2}{2^2 \cdot 3^2} \overset{2}{=} \frac{15 - 14}{4 \cdot 9} = \frac{1}{36}$$

Espresso a parole diventa*:*
Scompongo in fattori primi i denominatori: $12 = 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$ *e* $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$*;*
il $\text{mcm}\left(2^2 \cdot 3;\ 2 \cdot 3^2\right) = 2^2 \cdot 3^2$*;*
dato che il denominatore comune diviso il primo denominatore dà 3, il primo numeratore diventa $5 \cdot 3$ *dato che il denominatore comune diviso il secondo denominatore dà 2, il secondo numeratore diventa* $7 \cdot 2$*;*
eseguendo i calcoli ottengo: $\frac{1}{36}$.

Osservazione 3.6: *Data la naturale avversione degli esseri umani per la scomposizione in fattori, questo secondo metodo non pare più furbo, ma se osservate bene, si fanno calcoli con numeri più piccoli, non c'è più bisogno di svolgere divisioni e, soprattutto, in certi problemi sarà l'unico metodo percorribile. Tanto vale impararlo.*

Quando dobbiamo addizionare una frazione con un numero intero possiamo seguire un metodo abbreviato che permette di eliminare dei passaggi banali come dividere un numero per sé stesso o moltiplicare un numero per 1.

Nel prossimo esempio vediamo i due metodi applicati alla somma tra una frazione e un numero intero.

Esempio 3.7: *Calcola* $\frac{73}{20} - 3$

Denominatore comune*:* $\frac{73}{20} - 3 = \frac{73 \cdot 1 - 3 \cdot 20}{20} = \frac{73 - 60}{20} = \frac{13}{20}$
Che espresso con la filastrocca è:
"Il denominatore comune è 20, 20 diviso 20 fa 1, 73 per 1 fa 73, l'1 nel 20 ci sta 20 volte, 3 per 20 fa 60, 73 meno 60 fa 13. Il risultato è: tredici ventesimi".

Metodo più rapido*:* $\frac{73}{20} - 3 = \left(\frac{73 - 60}{20}\right) = \frac{13}{20}$
Che espresso con la filastrocca è:
"3 per 20 fa 60, 73 meno 60 fa 13 il risultato è: tredici ventesimi".
Dove il passaggio tra parentesi, di solito viene fatto a mente.

Esempio 3.8: *Esegui le seguenti addizioni:*

1. $-\frac{20}{7} - \frac{15}{7} = -\frac{35}{7} = -5$
2. $\frac{4}{12} - \frac{5}{15} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$
3. $\frac{6}{5} + \frac{3}{10} = \frac{6}{5} + \frac{3}{2 \cdot 5} = \frac{12+3}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$
4. $2 + \frac{9}{7} = \left(\frac{14+9}{7}\right) = \frac{23}{7}$
5. $\frac{15}{4} - 5 = \left(\frac{15-20}{4}\right) = -\frac{5}{4}$
6. $\frac{5}{8} - \frac{7}{6} = \frac{5}{2^3} - \frac{7}{2 \cdot 3} = \frac{15-28}{2^3 \cdot 3} = -\frac{13}{24}$

Moltiplicazione

Definizione 3.7: *Il* prodotto *di due frazioni è la frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori:*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Osservazione 3.7: *Anche in questo caso invece di semplificare il prodotto, conviene applicare la semplificazione incrociata prima di eseguire le moltiplicazioni.*

Esempio 3.9: *Calcola:* $\frac{112}{225} \cdot \frac{75}{56}$

$$\frac{\cancel{112}^{14}}{\cancel{225}_{9}} \cdot \frac{\cancel{75}^{3}}{\cancel{56}_{7}} = \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{9}_{3}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{7}_{1}} = \frac{2}{3}$$

Divisione

Prima di affrontare la divisione, diamo la definizione di reciproco:

Definizione 3.8: *Il* reciproco *del numero a,* ***diverso da zero****, è il numero a' tale che:* $a \cdot a' = 1$.

Il reciproco di zero non è definito.
Trovare il reciproco di una frazione è semplice.

Definizione 3.9: *Il* reciproco *di una frazione,* ***con il numeratore diverso da zero****, si ottiene scambiando il numeratore con il denominatore.*

$$\frac{a}{b} \overset{\text{reciproco}}{\longleftrightarrow} \frac{b}{a} \qquad \textit{perché:} \quad \frac{\cancel{a}^{1}}{\cancel{b}_{1}} \cdot \frac{\cancel{b}^{1}}{\cancel{a}_{1}} = 1$$

Ora abbiamo un metodo semplice per calcolare il quoziente di due frazioni di cui la seconda non nulla.

Definizione 3.10: *Il* quoziente *di due frazioni, con la seconda non nulla, si ottiene moltiplicando la prima per il reciproco della seconda:*

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Osservazione 3.8: *Come sempre, nella divisione, il divisore deve essere diverso da zero.*

Come per la sottrazione nei numeri relativi, così, usando i numeri razionali, non solo possiamo sempre eseguire la divisione esatta, ma non saremo più costretti a eseguire divisioni!

Esempio 3.10: *Calcola:* $\dfrac{560}{55} : \dfrac{24}{275}$

$$\frac{560}{55} \div \frac{24}{275} = \frac{560}{55} \cdot \frac{275}{24} = \frac{\cancel{560}^{70}}{\cancel{55}_{11}} \cdot \frac{\cancel{275}^{55}}{\cancel{24}_{3}} = \frac{70}{\cancel{11}_{1}} \cdot \frac{\cancel{55}^{5}}{3} = \frac{350}{3}$$

Potenza e radice

Definizione 3.11: *La* potenza *di una frazione, cioè una frazione elevata a un certo esponente, è uguale alla frazione che ha numeratore e denominatore elevati a quell'esponente.*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^e = 1 \cdot \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{e \text{ volte}} = \frac{1 \cdot \overbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}^{e \text{ volte}}}{1 \cdot \underbrace{b \cdot b \ldots \cdot b}_{e \text{ volte}}} = \frac{a^e}{b^e}$$

Così abbiamo ridotto il calcolo della potenza di una frazione al calcolo delle potenze del numeratore e del denominatore.

Osservazione 3.9: *Ovviamente, vale anche per le frazioni quanto già visto per gli interi:*

$$a^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)^{+1} \quad \textit{quindi} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{+1}$$

E fin qui facilmente abbiamo ampliato la definizione di potenza al caso di potenze che hanno per base una frazione…ma che dire per potenze che hanno per esponente una frazione? La faccenda si complica e si fa interessante!

Quale significato dare a una scrittura del genere: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$?

Semplifichiamo un po' la scrittura, e il problema, cercando di capire come risolvere questo calcolo:

$$a^{\frac{1}{n}}$$

Ricordando la terza proprietà delle potenze guardiamo cosa succede se eleviamo alla enne la precedente espressione:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a$$

Quindi elevare alla $\frac{1}{n}$ è l'operazione inversa di elevare alla n perché se elevo un numero alla $\frac{1}{n}$ e poi alla n o se elevo alla n e poi alla $\frac{1}{n}$ ottengo il numero di partenza.

Questo vuol dire che elevare alla $\frac{1}{n}$ è l'operazione inversa, rispetto alla base di elevare alla n. L'operazione inversa della potenza, rispetto alla base, viene chiamata radice e indicata con: $\sqrt[n]{a}$ quindi:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

e in generale:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

Definizione 3.12: *La* radice *di una frazione che ha per numeratore la radice del numeratore, e per denominatore la radice del denominatore:*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Esempio 3.11: *Esegui le seguenti potenze:*

1. $\left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{7^2}{12^2} = \frac{49}{144}$
2. $\left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{5^4}{3^4} = \frac{625}{81}$
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1^{10}}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$
4. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^{+3} = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64}$

Esempio 3.12: *Esegui le seguenti radici:*

1. $\sqrt{\frac{169}{9}} = \left(\frac{169}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{169^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{9}} = \frac{13}{3}$
2. $\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{64^{\frac{1}{3}}}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$

3.4 Decimali contro frazioni

Abbiamo visto due modi per rappresentare i numeri razionali:

1. la notazione decimale che è più comoda per rappresentare numeri approssimati;

2. le frazioni che sono più comode per eseguire operazioni con numeri razionali esatti.

Ma per il resto, le due notazioni sono equivalenti? Cioè tutti i numeri che possiamo rappresentare con le frazioni li possiamo anche rappresentare con i numeri decimali e viceversa?

Da frazione a decimale

Tutte le frazioni possono essere trasformate in numeri decimali, basta interpretare il segno di frazione come una divisione e eseguirla con il solito algoritmo.

Esempio 3.13: *Trasforma in numero decimale la frazione:* $\frac{197}{8}$

```
1 9 7 | 8
  3 7 | 2 4, 6 2 5
    5 0
      2 0
        4 0
          =
```

$$\frac{197}{8} = 28{,}625$$

Esempio 3.14: *Trasforma in numero decimale la frazione:* $\frac{155}{12}$

```
1 5 5 | 1 2
  3 5 | 1 2, 9 1 6
  1 1 0
      2 0
        8 0
          8
```

$$\frac{155}{12} = 12{,}91\overline{6}$$

Abbiamo già visto che otterremo sempre o un numero decimale limitato o periodico.

Da decimale a frazione

I numeri decimali limitati sono facilmente trasformabili in frazioni: basta scrivere una frazione con il numero decimale al numeratore e 1 al denominatore, poi moltiplicare entrambi i termini per una potenza di 10 adatta a eliminare la virgola.

Esempio 3.15: *Trasforma in frazione il numero decimale:* 16,25

$$16{,}25 = \frac{16{,}25}{1} = \frac{16{,}25 \cdot 100}{1 \cdot 100} = \frac{1625}{100} = \frac{65}{4}$$

Ma se il numero decimale è periodico, questo meccanismo non può essere usato: dovrei moltiplicare per un 1 seguito da *infiniti* zeri e ciò risulta un po' difficile già solo da scrivere.

Il problema è che nei numeri periodici abbiamo infinite cifre decimali, ma per scrivere la frazione dobbiamo averne un numero finito… Qualche ignoto matematico ha inventato un metodo geniale per eliminare infinite cifre decimali con una semplice operazione: basta eseguire un'opportuna sottrazione.

Supponiamo di voler trasformare il numero $n = 14{,}3\overline{56}$ in frazione, moltiplichiamo n per 1000 e da questo togliamo il numero di partenza moltiplicato per 10:

$$\begin{array}{rcl} 1000n & = & 14356{,}56565656\ldots \; - \\ 10n & = & 143{,}56565656\ldots \; = \\ \hline 990n & = & 14213{,}00000000\ldots \end{array}$$

Abbiamo così eliminato il periodo scoprendo che $990n$ è un numero intero:

$$990n = 14\,213$$

Adesso è facile: se 990 enne valgono 14 213, un solo enne varrà: $\dfrac{14\,213}{990}$ quindi:

$$14{,}3\overline{56} = \frac{14\,213}{990}$$

Con una qualunque calcolatrice si può verificare il risultato.

La generalizzazione del precedente esempio porta al seguente

Teorema 3.3: *Un numero decimale periodico è equivalente ad una frazione che ha:*

- *per* numeratore *la differenza tra il numero, senza la virgola, con il periodo scritto una sola volta e la parte del numero che precede il periodo;*
- *per* denominatore *tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti zeri quante sono le cifre comprese tra il periodo e la virgola.*

Perciò ogni frazione può essere trasformata in numero decimale e ogni numero decimale, limitato o periodico, può essere trasformato in una frazione. Quindi usare l'una o l'altra delle due notazioni per i numeri razionali è equivalente.

Osservazione 3.10: *Applica la precedente regola per trasformare in frazione il numero* $3{,}\overline{9}$.
$3{,}\overline{9} = \dfrac{39-3}{9} = \dfrac{36}{9} = 4$

È un po' sorprendente! È solo un caso? Prova con altri numeri decimali di periodo $\overline{9}$.

Numeri decimali illimitati non periodici

Abbiamo parlato di numeri decimali limitati e di numeri decimali periodici, esistono anche numeri decimali illimitati e non periodici? Se un numero decimale continua all'infinito, è possibile che continui ad essere diverso e non succeda che da un certo punto in poi incominci a ripetersi?

È possibile costruire dei numeri decimali illimitati che sicuramente non saranno periodici. Eccone alcuni:
0,1010010001000010000010000001000000001 ...
0,12345678910111213141516171819202122 23 ...
0,1223334444 ... 999999999101010101010101010101011 ...
Ma si può dimostrare che anche $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$..., e anche: 3,14159265358979323846264338327950288 ...
a cui è stato dato il nome di π (pi greco) e: 2,71828182845904523536028747135266249 ...
a cui è stato dato il nome di e (costante di Eulero, o di Nepero) sono numeri che non possono essere scritti sotto forma di frazioni e quindi sono illimitati e non periodici.

Tutti questi numeri non sono numeri razionali e si chiamano "irrazionali".

Osservazione 3.11: *In realtà, non solo esistono numeri irrazionali, ma il matematico Cantor ha dimostrato che i numeri irrazionali sono infinitamente di più dei numeri razionali (che già sono infiniti).*

3.5 Proprietà delle operazioni nei numeri razionali $\mathbb{Q}$

L'*estensione* di numeri *dai naturali agli iteri*, ha portato in dote gli *opposti* dei numeri, cioè gli *elementi inversi rispetto all'addizione*. E questo ha permesso di poter calcolare sempre la differenza di due numeri trasformando la sottrazione in una addizione.

L'*estensione* di numeri *dagli iteri ai razionali*, ha portato in dote i *reciproci* dei numeri, cioè gli *elementi inversi rispetto alla moltiplicazione*. E questo ha permesso di poter calcolare sempre il quoziente esatto di due numeri trasformando la divisione in una addizione.

Le altre proprietà delle operazioni già richiamate per i numeri interi restano valide anche per i numeri razionali.

Per quanto riguarda la struttura $(\mathbb{Q};\ \times)$ ora possiede anche l'elemento inverso di ogni numero non nullo quindi questa struttura è un *gruppo*.

La struttura composta dai numeri *razionali* e dalle due operazioni *addizione* e *moltiplicazione*, $(\mathbb{Q};\ +;\ \times)$ viene chiamata *campo*.

In questa struttura si possono risolvere tutte le equazioni del tipo: $ax + b = 0$.

3.6 Notazione scientifica e ordine di grandezza

Le discipline scientifiche quali la fisica, la biologia, l'astronomia etc, Devono spesso usare numeri molto grandi, o molto piccoli in valore assoluto, per rappresentare le misure degli oggetti di cui si occupano.

- il raggio della Terra è circa 6 400 000 m
- la velocità della luce nel vuoto è 299 790 000 m/s
- un globulo rosso ha il diametro di 0,000007 m.

I primi due numeri sono 'molto grandi', mentre l'ultimo è 'molto piccolo' e operare con numeri simili, non è affatto semplice.

Notazione scientifica

Definizione 3.13: *Un numero* α *è scritto in* notazione scientifica *se si presenta nella forma:*

$$\alpha = a \cdot 10^n$$

dove a *è un numero decimale maggiore o uguale a* 1 *e minore di* 10 *e* n *è un numero intero.*

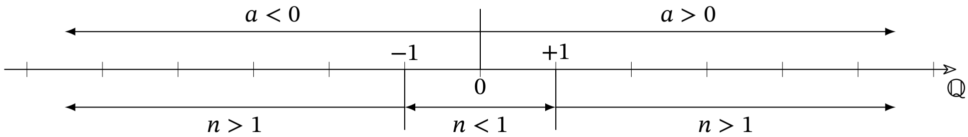
Esempio 3.16: *I numeri* $3{,}5 \cdot 10^7$ *e* $8{,}9 \cdot 10^{-5}$ *sono scritti in notazione scientifica, mentre i numeri* $0{,}5 \cdot 10^3$ *e* $10{,}3 \cdot 10^{-8}$ *non sono scritti in notazione scientifica in quanto il numero davanti alla potenza di 10 nel primo caso è 0,5 che è minore di 1, nel secondo caso è 10,3 che è maggiore di 10.*

Trasformiamo in notazione scientifica il diametro del globulo rosso, $0{,}000007\,\text{m}$:
$$0{,}000007\,\text{m} = \frac{7}{1\,000\,000}\,\text{m} = 7 \cdot \frac{1}{1\,000\,000}\,\text{m} = 7 \cdot 10^{-6}\,\text{m}$$

Applicando un meccanismo analogo al numero $0{,}000000026$:
$$0{,}000000026 = \frac{2{,}6}{100\,000\,000} = 2{,}6 \cdot \frac{1}{100\,000\,000} = 2{,}6 \cdot \frac{1}{10^8} = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$$
Si osservi che in questo secondo caso abbiamo posto a numeratore il valore 2,6 anziché 26, in quanto il numero k deve essere minore di 10.

Consideriamo ora la misura del raggio medio della Terra, ovvero $6\,378\,000\,\text{m}$, la sua espressione in notazione scientifica sarà: $6\,378\,000\,\text{m} = 6{,}378 \cdot 1\,000\,000 = 6{,}378 \cdot 10^6$.

$$\alpha = a \cdot 10^n$$



Osservazione 3.12: *A numeri 'piccoli' in valore assoluto, corrispondono potenze di dieci con esponente negativo; a numeri 'grandi' in valore assoluto, corrispondono potenze di dieci con esponente positivo.*

Procedura 3.2: *Scrivere un numero decimale in notazione scientifica:*

a) spostare la virgola di tanti posti in modo da avere una sola cifra diversa da zero a sinistra;

b) scrivere la moltiplicazione tra il numero ottenuto al passo precedente e dieci elevato ad un esponente pari al numero si spostamenti della virgola effettuati se la virgola è stata spostata verso sinistra o elevato al suo opposto se la virgola è stata spostata verso destra.

Esempio 3.17: *Scrivi 348 000 000 000 000 in notazione scientifica. Per comodità riscrivo il numero evidenziando l'attuale posizione della virgola: 348 000 000 000 000,0.*

a) Per ottenere un numero con una sola cifra diversa da zero a sinistra della virgola devo spostare la virgola di 14 posti verso sinistra;

b) scrivo il prodotto tra il numero ottenuto: $3{,}48$ *e 10 elevato alla 14:* $3{,}48 \cdot 10^{14}$.

Esempio 3.18: *Scrivi 0,0000340 in notazione scientifica.*

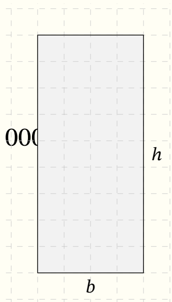
a) Devo spostare la virgola di 5 posti verso destra;

b) Moltiplico il numero ottenuto: $3{,}40$ *e 10 elevato alla* -5*:* $3{,}40 \cdot 10^{-5}$.

Esempio 3.19: *Trasforma in notazione scientifica e calcola* $\dfrac{3000 : 6 \textit{ milioni}}{5000 \cdot 0{,}000002}$.

$$\frac{3000 : 6 \textit{ milioni}}{5000 \cdot 0{,}000002} = \frac{3 \cdot 10^3 : (6 \cdot 10^6)}{5 \cdot 10^3 \cdot (2 \cdot 10^{-6})} = \frac{3 : 6 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = \frac{0{,}5}{10} \cdot 10^{-3+3} = 0{,}05 \cdot 10^0 = 5 \cdot 10^{-2}$$

Esempio 3.20: *Calcola l'area di un rettangolo di dimensioni:*
$b = 0{,}000\,000\,04\,\text{m}$ *e* $h = 0{,}000\,000\,09\,\text{m}$.
Usando la notazione decimale solita:



$$A = b \cdot h = 0{,}000\,000\,04\,\text{m} \cdot 0{,}000\,000\,09\,\text{m} = 0{,}000\,000\,000\,000$$

Lo stesso problema può essere espresso in notazione scientifica:

$$A = b \cdot h = \left(4 \cdot 10^{-8}\,\text{m}\right) \cdot \left(9 \cdot 10^{-8}\,\text{m}\right) = 36 \cdot 10^{-16}\,\text{m}^2$$

Ordine di grandezza

Spesso, nel trattare i numeri 'molto grandi' o 'molto piccoli', non è importante conoscere la misura con precisione, ma basta conoscere "quanto è grande", cioè l'entità della sua grandezza. Per fare ciò si introduce il seguente concetto.

Definizione 3.14: *Dato un numero scritto in forma scientifica, si definisce* ordine di grandezza *(abbreviato con la sigla o.d.g.), la potenza di* 10.

Procedura 3.3: *Determinare l'ordine di grandezza di un numero:*

a) scrivi il numero in notazione scientifica $k \cdot 10^n$

b) l'ordine di grandezza è 10^n.

Esempio 3.21: *Determinare l'ordine di grandezza dei numeri 0,000 074 e 47 000 000 000.*
Scriviamo dapprima i numeri in notazione scientifica:

$$0{,}000\,074 = 7{,}4 \cdot 10^{-5} \quad e \quad 47\,000\,000\,000 = 4{,}7 \cdot 10^{10}.$$

L'o.d.g. del primo numero è 10^{-5}*;* *l'o.d.g del secondo numero è* 10^{10}.

3.7 Rapporto, percentuale, proporzioni

Rapporto

Spesso un dato preso da solo non dà molte informazioni. Sapere che in una scuola sono iscritte 400 femmine non dice molto. Diversa è la situazione se conosciamo anche qual è il numero complessivo degli alunni.

Femmine = 400; Iscritti = 1200
In questo caso le femmine sono una minoranza: c'è una femmina ogni 3 iscritti. Questa informazione si può ottenere calcolando il rapporto tra le femmine e il totale:

$$\frac{Femmine}{Iscritti} = \frac{400}{1200} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

Femmine = 400; Iscritti = 600
In questo caso le femmine sono una maggioranza: ci sono 2 femmine ogni 3 iscritti. Questa informazione si può ottenere calcolando il rapporto tra le femmine e il totale:

$$\frac{Femmine}{Iscritti} = \frac{400}{600} = \frac{2}{3} \approx 0{,}666$$

Spesso il rapporto tra due valori è più interessante dei valori presi singolarmente. Quando il rapporto è tra due grandezze fisiche spesso si ottiene una nuova grandezza:

- Rapporto tra massa e volume dà la densità: $\dfrac{\text{massa}}{\text{volume}} = \text{densità}$
- Rapporto tra spazio e tempo dà la velocità: $\dfrac{\text{spazio}}{\text{tempo}} = \text{velocità}$
- Rapporto tra l'aumento di velocità e il tempo: $\dfrac{\text{aumento di velocità}}{\text{tempo}} = \text{accelerazione}$
- …

Proporzioni

Quando abbiamo due rapporti uguali: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ diremo che i quattro numeri a, b, c, d sono in proporzione. Altra notazione per le proporzioni è quella che indica le divisioni con i duepunti: ":", cioè: $a : b = c : d$, e si legge: "a sta a b come c sta a d".

I due numeri che si trovano al centro si chiamano *medi* e gli altri due si dicono *estremi*.

La proprietà fondamentale delle proporzioni:

Teorema 3.4: *In una proporzione, il prodotto dei* medi *è uguale al prodotto degli* estremi *(detto anche* prodotto incrociato*):*

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Da questa proprietà possiamo ricavare le formule per calcolare un medio o un estremo:

$$a = \frac{b \cdot c}{d} \quad \text{e} \quad b = \frac{a \cdot d}{c}$$

Un problema che ha collegamenti in altri ambiti della matematica riguarda l proporzioni continue.

Definizione 3.15: *Si dice* continua *una proporzione che ha i medi uguali:*

$$a : b = b : c$$

In questo caso la proprietà fondamentale diventa: $b^2 = a \cdot c$,

da cui si ricava: $b = \sqrt{a \cdot c}$ e $a = \dfrac{b^2}{c}$

Percentuale

Il rapporto è, di solito, un numero con la virgola e, quando è realizzato tra una parte e il tutto ha un valore compreso tra zero e uno. Dato che le persone normali provano un certo fastidio per i numeri con la virgola sono state inventate le percentuali che sono date dal rapporto moltiplicato per 100 e seguito dal simbolo "%". Sempre riferendoci all'esempio precedente:

$$\frac{1}{3} \approx 0{,}33 = 33\% \qquad \frac{2}{3} \approx 0{,}66 = 66\%$$

Dire il 10% o dire 0,1 è lo stesso, dire 25% o dire 0,25 è lo stesso, …

Definizione 3.16: *La* percentuale *è il rapporto tra due grandezze moltiplicato per 100.*

Per passare dalla scrittura percentuale alla scrittura decimale basta dividere per 100 il numero che esprime la percentuale:

$$35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35; \qquad 7\% = \frac{7}{100} = 0{,}07; \qquad 12{,}5\% = \frac{12{,}5}{100} = 0{,}125$$

Per passare dalla scrittura decimale alla scrittura in percentuale basta moltiplicare numeratore e denominatore per 100:

$$0{,}02 = \frac{0{,}02}{1} = \frac{2}{100} = 2\%; \qquad 0{,}23 = \frac{0{,}23}{1} = \frac{23}{100} = 23\%; \qquad 1{,}21 = \frac{1{,}21}{1} = \frac{121}{100} = 121\%$$

Per passare da una frazione alla percentuale conviene prima scrivere la frazione come numero decimale e poi da questo passare alla percentuale:

$$\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} = \frac{0{,}\overline{6}}{1} = \frac{66{,}\overline{6}}{100} = 66{,}\overline{6}\%$$

3.8 Espressioni con le frazioni

Abbiamo visto come si possono eseguire le operazioni tra numeri razionali espressi come frazioni. Ora mettiamo insieme diverse operazioni per calcolare intere espressioni.

Teniamo presente che la linea di frazione equivale ad una coppia di parentesi per cui le parentesi, se contengono solo una frazione, non sono più necessarie.

Esempio 3.22: *Calcola il valore della seguente espressione.*

$$\left\{\frac{3}{20}\cdot\left[\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right)) : 5+\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\right) : \frac{1}{14}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}\right]+\frac{2}{15}\right\} : 2=$$

1. *Eseguo le operazioni contenute nelle parentesi più interne calcolando il denominatore comune. Trasformo le divisioni in moltiplicazioni.*
$$=\left\{\frac{3}{20}\cdot\left[\frac{4-3}{9}\cdot\frac{1}{5}+\frac{15-14}{35}\cdot\frac{14}{1}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}\cdot\frac{1}{2}=$$
2. *Eseguo le addizioni presenti nei numeratori di due frazioni.*
$$=\left\{\frac{3}{20}\cdot\left[\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{35}\cdot\frac{14}{1}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}\cdot\frac{1}{2}=$$
3. *Eseguo le moltiplicazioni tra frazioni presenti nella parentesi quadra.*
$$=\left\{\frac{3}{20}\cdot\left[\frac{1}{45}+\frac{2}{5}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}\cdot\frac{1}{2}=$$
4. *Addiziono le frazioni presenti nella quadra.*
$$=\left\{\frac{3}{20}\cdot\left[\frac{1+18+1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}\cdot\frac{1}{2}=\left\{\frac{3}{20}\cdot\frac{20}{45}+\frac{2}{15}\right\}\cdot\frac{1}{2}=$$
5. *Eseguo la moltiplicazione nella parentesi graffa,*
$$=\left\{\frac{1}{15}+\frac{2}{15}\right\}\cdot\frac{1}{2}=$$
6. *Eseguo l'addizione nella graffa e poi la moltiplicazione che rimane.*
$$=\frac{3}{15}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

Nel prossimo esempio viene usato il metodo rapido per sommare un intero ad una frazione.

Esempio 3.23: *Calcola il valore della seguente espressione.*

$$\left[\frac{13}{5} : \left(3+\frac{9}{10}\right)+\frac{7}{8}+\left(\frac{13}{4}-2\right)\cdot\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{11}{3} : \left(6-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\left[\frac{13}{5} : \frac{39}{10}+\frac{7}{8}+\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{11}{3} : \frac{11}{2}=$$
$$=\left[\frac{13}{5}\cdot\frac{10}{39}+\frac{7}{8}+\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{2}{11}=$$
$$=\left[\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{3}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{2}{3}=$$
$$=\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right]\cdot\frac{2}{3}=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

Le potenze hanno la precedenza sulle altre operazioni, ma quando ci sono anche potenze da calcolare, conviene sempre controllare se è possibile usare qualche proprietà.

Non solo, ma anche quando non è possibile utilizzare le proprietà delle potenze, a volte può essere conveniente non eseguire la potenza ma scriverla sotto forma di prodotto:

Esempio 3.24: $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^3 = -\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 9\cdot 9\cdot 9}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 4\cdot 4} = \frac{9}{4}$

In questo caso siamo riusciti a risolvere l'espressione senza eseguire alcuna moltiplicazione.

Esempio 3.25: *Calcola il valore della seguente espressione.*

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \left(\frac{2}{15}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^2\right]^2 : \left(\frac{10}{9}\right)^2 - \left(1+\frac{8}{5}+\frac{1}{25}\right) = \\
&= \left[\left(\frac{14-5}{10}\right)^2 : \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{15\cdot 15\cdot 15\cdot 15}\cdot\frac{5\cdot 5}{2\cdot 2}\cdot\frac{15\cdot 15}{2\cdot 2}\right]^2 : \left(\frac{10}{9}\right)^2 - \frac{25+40+1}{25} = \\
&= \left[\left(\frac{9}{10}\right)^2 : \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \frac{1}{9}\right]^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \frac{66}{25} = \\
&= \left[1-\frac{1}{9}\right]^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \frac{66}{25} = \\
&= \left[\frac{8}{9}\right]^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \frac{66}{25} = \\
&= \frac{8\cdot 8}{9\cdot 9}\cdot\frac{9\cdot 9}{10\cdot 10} - \frac{66}{25} = \frac{16}{25} - \frac{66}{25} = -\frac{50}{25} = -2
\end{aligned}
$$

Se nell'espressione, oltre alle frazioni, ci sono anche numeri decimali limitati o periodici, conviene in un primo passaggio trasformare ogni numero razionale in frazione e poi calcolare.

Esempio 3.26: *Calcola il valore della seguente espressione.*

$$
\begin{aligned}
&3{,}5\cdot 0{,}4 - 1{,}2 - 0{,}8\bar{6}\cdot\left(1{,}\bar{6} + 5{,}8\bar{3} - 5{,}5 - \frac{23}{13}\right) = \\
&= \frac{35}{10}\cdot\frac{4}{10} - \frac{12}{10} - \frac{86-8}{90}\cdot\left(\frac{16-1}{9} + \frac{583-58}{90} - \frac{55}{10} - \frac{23}{13}\right) = \\
&= \frac{7}{5} - \frac{6}{5} - \frac{78}{90}\cdot\left(\frac{15}{9} + \frac{525}{90} - \frac{55}{10} - \frac{23}{13}\right) = \\
&= \frac{1}{5} - \frac{13}{15}\cdot\left(\frac{5}{3} + \frac{35}{6} - \frac{11}{2} - \frac{23}{13}\right) = \\
&= \frac{1}{5} - \frac{13}{15}\cdot\left(\frac{5}{3} + \frac{35}{6} - \frac{11}{2} - \frac{23}{13}\right) = \\
&= \frac{1}{5} - \frac{13}{15}\cdot\frac{130+455-429-138}{2\cdot 3\cdot 13} = \\
&= \frac{1}{5} - \frac{13}{15}\cdot\frac{18}{2\cdot 3\cdot 13} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0
\end{aligned}
$$

3.9 Problemi

Problemi con le frazioni

Problemi diretti

Nei problemi diretti si conosce il valore di una grandezza e se ne deve calcolare la parte che corrisponde a una frazione. In questo caso basta moltiplicare la grandezza intera per la frazione: $parte = \frac{m}{n} \cdot tot$.

Esempio 3.27: *Una pasticceria produce 568 cornetti a settimana: i* $3/4$ *sono alla crema,* $1/8$ *sono al cioccolato e* $1/8$ *alla marmellata. Quanti cornetti di ciascun tipo produce?*
Per risolvere il problema occorre calcolare la parte che corrisponde a ciascuna frazione:

- *crema:* $\frac{3}{4} \cdot 568 = 426$
- *ciocc.:* $\frac{1}{8} \cdot 568 = 71$
- *marm.:* $\frac{1}{8} \cdot 568 = 71$

Problemi inversi

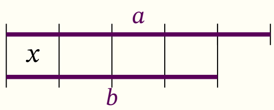
Nei problemi inversi si conosce il valore numerico di una frazione di una certa grandezza si deve calcolare il valore dell'intera grandezza. In questo caso occorre dividere il valore numerico dato per la frazione, si ottiene così l'intero.
Dalla formula del problema diretto si ricavano le formule dei due problemi inversi:

$$tot = parte : \frac{m}{n} = parte \cdot \frac{n}{m} \quad \text{e:} \quad \frac{m}{n} = \frac{parte}{tot}$$

Esempio 3.28: *Mario ha speso* $21\,€$ *che corrispondono ai* $3/5$ *della somma che possedeva. Quanto possedeva?*
È sufficiente dividere 21 per la frazione: $21\,€ : \frac{3}{5} = 21\,€ \cdot \frac{5}{3} = 35\,€$

Esempio 3.29: *Giuseppe ha una certa somma a disposizione $D0 = 150$ €. Se spende i $3/5$ della disposizione iniziale e poi i $2/3$ della somma rimanente, quanto ha a disposizione alla fine?*
Primo metodo
La prima volta Giuseppe spende: $S1 = \cdot\frac{3}{5} \cdot D0 = \frac{3}{5} \cdot 150\,€ = 90\,€$
perciò gliene rimangono: $D1 = D0 - S1 = 150\,€ - 90\,€ = 60\,€$
la seconda volta spende i $2/3$ di 60 €, cioè $S2 = \frac{2}{3} \cdot 60\,€ = 40\,€$
in tutto ha speso: $ST = S1 + S2 = 90\,€ + 40\,€ = 130\,€$
gli rimangono dunque: $D2 = D0 - ST = 150\,€ - 130\,€ = 20\,€$.
Secondo metodo*:*
osserviamo che, se la prima volta ha speso: $S1 = D0 \cdot \frac{3}{5}$,
significa che gli rimane: $D1 = D0 - D0 \cdot \frac{3}{5} = \left(1 - \frac{3}{5}\right) D0 = \frac{2}{5} D0$
La seconda volta spende i $2/3$ dei $2/5$ della somma,
cioè: $S2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} D0 = \frac{4}{15} D0$.
In tutto ha speso: $ST = S1 + S2 = \frac{3}{5} D0 + \frac{4}{15} D0 = \frac{3 \cdot 3 + 4}{15} D0 = \frac{13}{15} D0$
gli rimane perciò: $D2 = D0 - \frac{13}{15} D0 = \frac{2}{15} D0$
pertanto gli rimangono $D2 = \frac{2}{15} D0 = \frac{2}{15} \cdot 150\,€ = 20\,€$.

Esempio 3.30: *Trova due numeri sapendo che la loro somma è 108 e uno è i 4/5 dell'altro.*
Sintetizziamo i dati:



$$\begin{cases} a + b = 108 \\ b = \frac{4}{5} a \end{cases}$$

Se valgono entrambe queste uguaglianze, nella prima, posso sostituire b con $\frac{4}{5} a$ *ottenendo:*

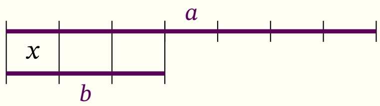
$$a + \frac{4}{5} a = 108 \Rightarrow \frac{5}{5} a + \frac{4}{5} a = \frac{9}{5} a = 108 \Rightarrow a = \frac{5}{9} 108 = 60$$

e $b = \frac{4}{5} a = \frac{4}{5} 60 = 48$

Un altro modo per risolvere il problema precedente è illustrato nel seguente esempio.

Esempio 3.31: *Trova due numeri sapendo che la loro somma è 4800 e uno è i 3/7 dell'altro.*
Sintetizziamo i dati:

$$\begin{cases} a+b=500 \\ b=\dfrac{3}{7}a \end{cases}$$



Se $b=\dfrac{3}{7}a$ *allora possiamo pensare che* a *sia composto da* 7 *parti uguali e* b *da* 3 *di quelle parti:* $a=7x$; $\quad b=3x$.

Quindi: $\begin{cases} a=7x \\ b=3x \\ a+b=7x+3x=10x=500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=50 \\ a=7x=7\cdot 50=350 \\ b=3x=3\cdot 50=150 \end{cases}$

Problemi con le percentuali

Dalla formula $\quad perc=\dfrac{parte}{totale}\quad$ si possono ricavare le formule inverse:

$$parte = totale\cdot perc \quad \text{e} \quad totale=\frac{parte}{perc}$$

Esempio 3.32: *In una scuola che ha 857 alunni ne sono stati promossi il 95%. Quanti sono stati i promossi?*
Per rispondere, si moltiplica il numero totale di alunni per la percentuale $0{,}95=95/100$.
Precisamente $\dfrac{95}{100}\cdot 8570{,}95\cdot 857 = 814{,}15$. *Poiché il risultato non è un numero intero la percentuale è stata approssimata. Gli alunni promossi sono stati 814.*

A volte è nota una parte della grandezza e si vuole conoscere che percentuale è la parte nota rispetto al totale. In questo caso applichiamo la definizione: $perc = parte/totale$.

Esempio 3.33: *In una scuola, 126 alunni svolgono attività sportive, mentre 520 no. Qual è la percentuale degli "sportivi"?*

$$perc=\frac{parte}{totale}=\frac{126}{126+520}=\frac{126}{646}\approx 0{,}19504644\approx 19{,}50\%$$

A volte conosciamo una parte di una popolazione e la corrispondente percentuale.

Esempio 3.34: *Sappiamo che 47 individui costituiscono il 3% di una popolazione. A quanto ammonta l'intera popolazione?*

$$totale=\frac{parte}{perc}=\frac{47}{.03}=1566{,}\overline{6}\approx 1567$$

Problemi con gli sconti

Esempio 3.35: *Un pantalone costava* 70 € *e viene venduto con il* 20% *di sconto, a quanto viene venduto?*

Primo metodo:

Sconto $= 70\,€ \cdot 20\% = 70\,€ \cdot 0{,}20 = \frac{20}{100} \cdot 70\,€ = 14$,

prezzo scontato: $70\,€ - 14\,€ = 56\,€$.

Secondo metodo:

Il prezzo finale sarà 100% *del prezzo meno il* 20% *del prezzo:*

$70\,€ \cdot (100\% - 20\%) = 70\,€ \cdot (1{,}00 - 0{,}20) = 70\,€ \cdot 0{,}80 = 56\,€$.

Esempio 3.36: *Un paio di scarpe da € 120 viene venduto scontato a € 75 Qual è stata la percentuale di sconto praticato?*

Iniziamo calcolando lo sconto:

$sconto = prezzoiniziale - prezzoscontato = 120\,€ - 75\,€ = 45\,€$

poi la percentuale: $\frac{45}{120} = 0{,}375 = 37{,}5\%$.

Esempio 3.37: *Mario ha trovato in un negozio il computer che stava cercando; per fortuna era scontato del* 15%*, ha risparmiato cosi* 120 €*. Quanto costa il computer di listino?*

Dato che: $parte = totale \cdot perc \Leftrightarrow totale = \frac{parte}{perc}$,

e che: $15\% = 0{,}15$

$prezzopieno = \frac{parte}{perc} = \frac{120\,€}{0{,}15} = 800\,€$

Esempio 3.38: *Se ti viene proposto uno sconto di 10 € su un oggetto che costa 84 € che percentuale di sconto ti viene applicata?*

$$scontopercento = \frac{sconto}{prezzointero} = \frac{10\,€}{84\,€} \approx 0{,}119 \approx 12\%$$

3.10 Un po' di storia

Quando si deve dividere una certa grandezza o totalità in un certo numero di parti uguali non sempre sono sufficienti i numeri interi per rappresentare il risultato della divisione. Per esempio, per dividere l'unità in due parti uguali i numeri interi non sono sufficienti.

Gli antichi hanno affrontato questo tipo di problema utilizzando varie scritture per rappresentare le parti in cui dividere l'unità, ossia le frazioni.

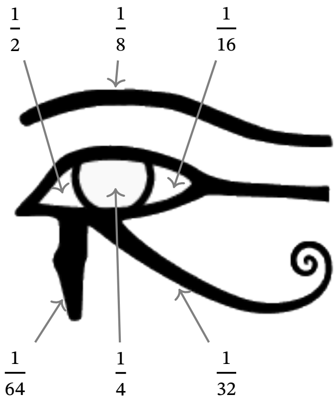
I Babilonesi scrivevano frazioni aventi come denominatore una potenza di 60, la base della loro numerazione; tuttavia non usavano una notazione specifica per le frazioni ed il valore corretto andava interpretato dal contesto.

Gli Egizi facevano largo uso dei numeri frazionari che rappresentavano come somme di frazioni unitarie, ossia frazioni con numeratore uno. La frazione unitaria $\frac{1}{n}$ (con n numero naturale diverso da zero) veniva rappresentata in forma geroglifica ponendo il denominatore n scritto con la normale rappresentazione del numero n sotto ad un ovale. La frazione $\frac{1}{12}$, per esempio, veniva così rappresentata:

Nel *papiro di Ahmes* (detto anche *papiro di Rhind*) troviamo una tabella che dà la scomposizione in frazioni unitarie delle frazioni del tipo $\frac{2}{n}$, con n dispari: la frazione $\frac{2}{43}$ è rappresentata come somma di frazioni unitarie nel seguente modo:

$$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}$$

Alcune unità frazionarie più comuni venivano indicate con le parti dell'occhio di Horus; secondo la leggenda Horus, nella lotta contro lo zio Seth, reo di avergli ucciso il padre, perse un occhio le cui parti vennero ritrovate e ricomposte dal dio Toth a meno di una piccola parte.



I Romani fecero poco uso dei numeri frazionari; si limitarono a considerare le parti delle misure in uso che venivano divise in 12, 24, 36, 48…Avevano pertanto simboli e nomi particolari per indicare alcune frazioni. *Semis* per indicare $\frac{1}{2}$, il cui simbolo era *S* oppure *Z sextans* per indicare $\frac{1}{6}$, *dracma* per indicare $\frac{1}{96}$ e *obolus* per indicare la sesta parte della *dracma*.

Furono gli arabi a introdurre l'attuale scrittura delle frazioni e i termini *numeratore* e *denominatore*.

La notazione attuale per le frazioni si deve sostanzialmente agli arabi, in Europa fu diffusa da Leonardo Pisano (Fibonacci) che nel il suo *Liber Abaci* (1202) scrive e opera con le frazioni come oggi le conosciamo.

3.11 Esercizi

3.1. *Raggruppa le seguenti frazioni in insiemi di frazioni equivalenti. Etichetta l'insieme con un numero razionale, prendendo per ogni gruppo la frazione ridotta ai minimi termini.*

$$\frac{1}{3};\quad \frac{2}{4};\quad -\frac{5}{2};\quad \frac{6}{-14};\quad \frac{-12}{4};\quad \frac{3}{6};\quad \frac{-3}{-9};\quad \frac{10}{-4};\quad \frac{10}{20};\quad \frac{-18}{42};\quad \frac{5}{15};\quad -\frac{9}{21};\quad -\frac{15}{6};\quad \frac{4}{12}.$$

3.2. *Riscrivi le seguenti frazioni improprie come somma di un numero naturale e una frazione propria.*

$$\frac{10}{3};\quad \frac{17}{9};\quad \frac{11}{2};\quad \frac{25}{3};\quad \frac{17}{10};\quad \frac{15}{6}.$$

3.3. *Senza eseguire le divisioni indica quali di queste frazioni possono essere scritte come numero decimale finito (DF), quali come numero decimale periodico (DP) e quali come numero intero (I):*

a) $-\frac{3}{2}$ $\boxed{DF}$ $\boxed{DP}$ $\boxed{I}$

b) $-\frac{6}{5}$ $\boxed{DF}$ $\boxed{DP}$ $\boxed{I}$

c) $+\frac{2}{25}$ $\boxed{DF}$ $\boxed{DP}$ $\boxed{I}$

d) $+\frac{5}{8}$ $\boxed{DF}$ $\boxed{DP}$ $\boxed{I}$

e) $+\frac{5}{6}$ $\boxed{DF}$ $\boxed{DP}$ $\boxed{I}$

f) $-\frac{5}{12}$ $\boxed{DF}$ $\boxed{DP}$ $\boxed{I}$

g) $+\frac{12}{6}$ $\boxed{DF}$ $\boxed{DP}$ $\boxed{I}$

h) $+\frac{5}{10}$ $\boxed{DF}$ $\boxed{DP}$ $\boxed{I}$

3.4. *Trasforma le seguenti frazioni in numeri decimali.*

a) $\frac{13}{2}$
b) $\frac{11}{3}$
c) $\frac{3}{5}$
d) $\frac{15}{6}$
e) $\frac{17}{7}$
f) $\frac{15}{8}$
g) $\frac{12}{9}$
h) $\frac{127}{10}$
i) $\frac{122}{11}$
j) $\frac{13}{12}$
k) $\frac{35}{121}$
l) $\frac{121}{35}$
m) $\frac{12}{10}$
n) $\frac{127}{100}$
o) $\frac{122}{1100}$
p) $\frac{13}{100}$
q) $\frac{35}{1000}$
r) $\frac{121}{10000}$
s) $\frac{12}{5}$
t) $\frac{13}{7}$
u) $\frac{15}{4}$
v) $\frac{5}{8}$
w) $\frac{32}{9}$
x) $\frac{21}{20}$

3.5 (*). *Trasforma in frazioni i seguenti numeri decimali.*

a) 12,5
b) 4,2
c) 6,25
d) 3,75
e) 0,1
f) 2,5
g) 100,100
h) 0,12
i) 1,1030
j) 0,00100
k) 100,0010
l) 0,0001
m) 1,25
n) 0,08
o) 1,002
p) 15,675
q) 1,7
r) 1,46
s) 0,13
t) 0,149

$\left[a)\ \frac{25}{2},\quad b)\ \frac{21}{5}\quad c)\ \frac{25}{4}\quad d)\ \frac{15}{4}\quad e)\ \frac{1}{10}\quad f)\ \frac{5}{2} \ldots\right]$

3.6. *Trasforma i seguenti numeri decimali in frazioni.*

a) $-1,25$	*f)* $3,\overline{752}$	*k)* $100,\overline{100}$	*p)* *0,03;*	*u)* $0,\overline{21}$
b) *0,03;*	*g)* $-0,\overline{38}$	*l)* $100,\overline{001}$	*q)* $23,\overline{5}$	*v)* $2,3\overline{4}$
c) $-2,\overline{1}$	*h)* $11,\overline{175}$	*m)* *0,08;*	*r)* $22,\overline{32}$	*w)* $3,21\overline{8}$
d) $0,\overline{13}$	*i)* $0,01\overline{02}$	*n)* *0,2;*	*s)* *0,25;*	*x)* $0,03\overline{4}$
e) *5,080;*	*j)* $0,12\overline{345}$	*o)* *0,1;*	*t)* $31,\overline{02}$	*y)* $0,0\overline{751}$

3.7. *Scrivi la frazione generatrice di* $12,3\overline{45}$ *Qual è la 614-esima cifra decimale del numero?*

3.8. *Calcola* $3,\overline{9} - 0,\overline{9}$ *e* *Calcola* $0,\overline{9} \cdot 3$ *Cosa osservi?*

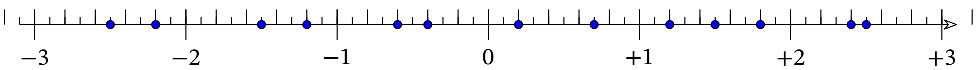
3.3 Rappresentazione sulla retta

3.9. *Rappresenta su una retta orientata i seguenti gruppi di numeri razionali, ciascun gruppo su una retta.*

a) $\frac{2}{3}; \quad -\frac{3}{4}; \quad \frac{5}{2}; \quad -\frac{7}{12}; \quad \frac{3}{2}; \quad -\frac{11}{6}; \quad \frac{9}{4}$ *c)* $\frac{10}{3}; \quad \frac{5}{3}; \quad 2; \quad \frac{0}{3}; \quad \frac{4}{3}; \quad \frac{2}{3}; \quad \frac{5}{6}; \quad \frac{13}{6}$

b) $\frac{0}{4}; \quad \frac{5}{4}; \quad \frac{9}{4}; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{19}{8}; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{7}{4}; \quad \frac{4}{2}$ *d)* $\frac{1}{2}; \quad \frac{3}{4}; \quad -\frac{5}{4}; \quad -\frac{1}{2}; \quad \frac{7}{8}; \quad -\frac{5}{16}$

3.10. *Scrivi i numeri razionali rappresentati dai punti segnati sulla retta nella figura.*



3.11. *Disegna su una retta orientata i seguenti numeri decimali, ciascun gruppo su una retta.*

a) $0,6 \quad 2,3 \quad -1,2 \quad -0,06$

b) $+1,4 \quad -0,3 \quad -1,5 \quad 0,2$

c) $-0,8 \quad -1,6 \quad +4,91 \quad -1,17$

d) $1,55 \quad 2,01 \quad -3,0 \quad -2,10$

3.3 Confronto di frazioni

3.12. *Inserisci tra le seguenti coppie di numeri razionali i simboli di maggiore (>), minore (<) o uguale (=).*

a) $\frac{4}{5} \dots \frac{5}{7}$ *b)* $-\frac{9}{5} \dots -\frac{8}{3}$ *c)* $\frac{2}{7} \dots \frac{6}{21}$ *d)* $-\frac{1}{2} \dots -\frac{3}{4}$

3.13. *Qual è il maggiore?* $\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{12}$

3.14. *Qual è il minore?* $-\frac{2}{3} \quad -\frac{3}{4} \quad -\frac{5}{6} \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{5}$

3.15. *Metti in ordine:* $\frac{3}{4}; \quad \frac{4}{3}; \quad \frac{11}{12}; \quad \frac{5}{3}$

3.16. *Scrivi in ordine crescente:*

$-\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad -\frac{5}{6} \quad \frac{1}{2}, \quad -1 \quad -\frac{2}{5} \quad 0$

3.17. *Scrivi in ordine decrescente:*

$-\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$ $-\frac{6}{5}$ $\frac{2}{5}$, -1 $\frac{5}{2}$ 0

3.18. *Qual è il minore?* A $\frac{2}{3}$ B $\frac{2}{7}$ C $\frac{3}{2}$ D $\frac{1}{2}$

3.19. *Ordina dal più piccolo al più grande i seguenti gruppi di numeri.*

a) 10,011 10,110 11,001 11,100;
b) 10,01 11,11 10,101 10,001;
c) 0,101 0,011 0,110 0,0101;
d) 1,0101 1,1001 1,0011 1,0110;

3.20. *Scrivi una frazione molto vicina a* $-\frac{2}{9}$.

3.21. *Scrivi una frazione compresa tra:* $\frac{3}{5}$ *e* $\frac{7}{10}$; $\frac{5}{3}$ *e* $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{2}$ *e* $\frac{2}{3}$;

3.22. *Quali disuguaglianze sono vere?*

a) $-\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$ V F
b) $-\frac{7}{6} > +\frac{6}{7}$ V F
c) $-\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$ V F
d) $+\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$ V F
e) $+\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$ V F
f) $+\frac{7}{6} > -\frac{6}{7}$ V F

3.23. *Quale dei seguenti numeri è più vicino a 1?*

A 0,10 B 0,99 C 0,01 D 0,90

3.24. *Quale dei seguenti numeri è più vicino alla frazione* $\frac{1}{10}$?

A 0,01 B 0,90 C 1,01 D 0,19

3.25. *Scrivi due numeri compresi tra:*

a) 2,3 *e* 3,4;
b) 3,4 *e* 3,6;
c) $2,\overline{3}$ *e* $2,\overline{4}$
d) $1,1\overline{3}$ *e* $1,2\overline{3}$
e) $3,\overline{4}$ *e* $3,\overline{6}$
f) $1,\overline{35}$ *e* $1,\overline{36}$

3.26. *Rappresenta su una opportuna retta numerica le seguenti frazioni e poi riscrivile in ordine crescente:*

$$\frac{3}{4};\ \frac{3}{8};\ \frac{1}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{2}{5};\ \frac{6}{3};\ \frac{5}{6};\ \frac{12}{4};\ \frac{19}{8};\ \frac{16}{5}.$$

3.3 Operazioni con le frazioni

3.27. *Calcola le seguenti somme algebriche tra frazioni.*

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$	f) $-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}$	k) $\frac{5}{6}-\frac{5}{12}$	p) $\frac{1}{5}-1$
b) $\frac{7}{11}+\frac{4}{11}$	g) $-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$	l) $1-\frac{3}{2}$	q) $4+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}$
c) $\frac{3}{2}-\frac{5}{2}$	h) $\frac{4}{3}-\frac{6}{5}$	m) $\frac{11}{5}+5$	r) $\frac{4}{3}+3-\frac{1}{2}$
d) $\frac{8}{18}+\frac{5}{9}$	i) $\frac{2}{5}+\frac{5}{8}$	n) $\frac{7}{3}-\frac{6}{4}$	s) $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}$
e) $\frac{6}{5}+0$	j) $\frac{5}{8}+\frac{5}{6}$	o) $3-\frac{2}{3}$	t) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

3.28. *Completa la seguente tabella.*

n	d	$\frac{n}{d}$	$-\frac{n}{d}$	$\frac{-n}{d}$	$\frac{-n}{-d}$
$+5$	$+2$				
$+4$	-7				
-1	$+9$				
-5	-8				

3.29. *Completa la seguente tabella.*

a	b	$a+b$	$+a-b$	$-a+b$	$-a-b$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$				
$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$				
-1	$\frac{2}{5}$				
-5	$\frac{17}{3}$				

3.30. *Calcola a mente:*

a) $0{,}1+0{,}1$	d) $0{,}91+0{,}19$	g) $1{,}1-0{,}9$	j) $3-1{,}1$
b) $0{,}2+0{,}8$	e) $1{,}10+1{,}01$	h) $100-0{,}99$	k) $4-1{,}4$
c) $0{,}01+0{,}9$	f) $0{,}999+0{,}10$	i) $2-0{,}1$	l) $10-0{,}10$

3.31. *Calcola i seguenti prodotti fra frazioni.*

a) $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$	c) $-\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$	e) $\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$
b) $6\cdot\frac{5}{2}$	d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}$	f) $\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\frac{5}{6}$

3.32. *Calcola a mente:*

a) $0{,}1 \cdot 0{,}1$
b) $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$
c) $0{,}1 \cdot 100$
d) $1 \cdot 0{,}1$
e) $2 \cdot 0{,}1$
f) $20 \cdot 0{,}02$
g) $0{,}01 \cdot 10$
h) $\frac{1}{100} \cdot 10$
i) $0{,}1 \cdot 0{,}2$
j) $\frac{3}{10} \cdot 30$
k) $0{,}01 \cdot 0{,}1$
l) $1000 \cdot 0{,}0001$

3.33. *Completa la seguente tabella.*

a	b	$a \cdot b$	$-a \cdot b$	$a : b$	$b : a$
$-\frac{2}{3}$	$+\frac{7}{3}$				
$+\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$				
-1	$+\frac{2}{5}$				
-5	$+\frac{17}{3}$				
1	$-\frac{6}{7}$				

3.34. *Calcola i seguenti quozienti fra frazioni.*

a) $\frac{3}{2} : \frac{4}{3}$
b) $-\frac{6}{5} : \left(-\frac{2}{3}\right)$
c) $\frac{+3}{2} : \left(\frac{-3}{2}\right)$ $\quad \left(-\frac{5}{6}\right)$
d) $\frac{2}{5} : \frac{5}{8} :$

3.35. *Calcola a mente:*

a) $0{,}30 \cdot 0{,}40$
b) $0{,}5 : 0{,}1$
c) $0{,}5 \cdot 0{,}2$
d) $0{,}1 \cdot 0{,}1$
e) $0{,}4 \cdot 3$
f) $0{,}1 : 0{,}1$
g) $0{,}5 \cdot 20$
h) $0{,}1 \cdot 0{,}010$

3.36. *Calcola il valore delle seguenti potenze.*

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$
b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$
c) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$
d) $\left(\frac{1}{2} - 1\right)^3$
e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^0$
f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^1$
g) -2^4
h) $(-2)^4$
i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$
j) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$
k) $-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$
l) -2^{-4}
m) $(-2)^{-4}$
n) $-\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$

3.37. *Indica quali proprietà delle potenze sono state applicate nei seguenti passaggi.*

a) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = -\frac{3^5}{2^5}$

b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 : \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} = -\frac{2}{3}$

c) $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^6 = +\frac{3^6}{2^6}$

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 : \left(\frac{25}{10}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} : \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)^2 = 1^2$

e) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{25}\right)^2 = \left(-\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{25}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = +\frac{3^2}{5^2}$

3.38. *Completa la seguente tabella.*

a	a^2	$(-a)^2$	$-a^2$	a^3	a^0	a^{-1}	a^{-2}
$-\frac{2}{3}$							
$+\frac{3}{4}$							
$+\frac{2}{5}$							
$+\frac{12}{7}$							
$-\frac{6}{5}$							

3.39. *Calcola a mente.*

a) $3{,}4 \cdot 10^2$
b) $3{,}4 : 10^2$
c) $0{,}34 \cdot 10^4$
d) $34{,}4 : 10^2$
e) $0{,}34 \cdot 10^3$
f) $34{,}10 \cdot 10^3$
g) $3{,}04 \cdot 10$
h) $0{,}34 : 10^2$

3.40. *Calcola le seguenti potenze prestando particolare attenzione ai segni.*

a) $-(-2)^2$
b) $\dfrac{2^{-2} - 3^{-1}}{2^{-2} + 3^{-1}}$
c) $[-(-1)^2]^3$
d) $\dfrac{2^{-1} + 3^{-2}}{2^{-2} + 3^{-1}}$
e) $-(-2)^{-4}$
f) $(-3)^3 \cdot \dfrac{2^{-2} - 5^{-1}}{2^{-2} + 5^2}$

3.6 Notazione scientifica e ordine di grandezza

3.41. *Esprimere in notazione scientifica i seguenti numeri.*

a) $780000000000000 = 7{,}8 \cdot 10^{\cdots}$
b) $423000000000 = 4{,}23 \cdot 10^{\cdots}$
c) $76000000000000 = \ldots \cdot 10^{\cdots}$
d) $0{,}00000000098 = 9{,}8 \cdot 10^{\cdots}$
e) $0{,}0000045 = 4{,}5 \cdot 10^{\cdots}$
f) $0{,}000000987 = \ldots \cdot 10^{\cdots}$

3.42. *Quale tra i seguenti numeri non è scritto in notazione scientifica?*
$\boxed{A}$ $5{,}67 \cdot 10^{-12}$ $\boxed{B}$ $4{,}28 \cdot 10^8$ $\boxed{C}$ $10{,}3 \cdot 10^{-2}$ $\boxed{D}$ $9{,}8 \cdot 10^7$

3.43. *Determina in notazione scientifica l'area di una lamina di ferro quadrata avente il lato di misura* 0,00000000021 m

3.44. *Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri.*

34000; 0,000054; 26; 0,54000; 5; 0,00001; 990000; 222.

3.45. *Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.*

a) $0{,}00036 \cdot 20000000 = \ldots$

b) $8400 : 42 = \ldots$

c) $900000000 : 0{,}0003 = \ldots$

d) $3 : 10000000 = \ldots$

3.46. *Calcola ed esprimi il risultato in notazione scientifica.*

a) $3 \cdot 10^{24} + 4 \cdot 10^{24}$

b) $0{,}3 \cdot 10^{104} + 4 \cdot 10^{103}$

c) $6 \cdot 10^{101} \cdot 0{,}15 \cdot 10^{101}$

d) $12 \cdot 10^{2000} : 6 \cdot 10^{200}$

3.47 (*). *Esegui i seguenti calcoli usando la notazione scientifica:*

a) $\dfrac{(0{,}00002)^2 : 30000000 \cdot (0{,}1)^5}{4000 \cdot 0{,}02 : 0{,}000003}$ $[5 \cdot 10^{-30}]$

b) $\dfrac{(3000)^2 : 0{,}000003 : 20000000}{0{,}00002 : 0{,}00000004}$ $\left[3 \cdot 10^{2}\right]$

c) $\dfrac{(2000)^3 \cdot (0{,}000001)^5 : 20}{(0{,}0003)^2 : 3.000.000}$ $\left[1{,}3 \cdot 10^{-8}\right]$

d) $\dfrac{4000^2 \cdot 0{,}000012}{3 \cdot 10^9 \cdot 2000^3}$ $\left[8 \cdot 10^{-18}\right]$

3.48. *Disponi in ordine di distanza dal Sole i seguenti pianeti, in base alla distanza media riportata tra parentesi: Mercurio* $(5{,}8 \cdot 10^7)$*, Nettuno* $(4{,}5 \cdot 10^9)$*, Giove* $(7{,}8 \cdot 10^8)$*, Plutone* $(6{,}1 \cdot 10^9)$*, Urano* $(2{,}7 \cdot 10^9)$*, Terra* $(1{,}5 \cdot 10^8)$*, Marte* $(2{,}3 \cdot 10^8)$

3.49. *Determina l'ordine di grandezza dei seguenti numeri.*

a) 126 000 000

b) 0,0000098

c) 7 000 000

d) 0,0000000027

3.50. *Completare la seguente tabella.*

Numero	26000000	0,000083	490000	0,0000081
Notazione scientifica				
ordine di grandezza				

3.51. *Determina l'ordine di grandezza del risultato dei seguenti calcoli.*

a) $5{,}3 \cdot 10^5 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3 - 2{,}5 \cdot 10^6$

b) $(5 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^3)^3$

3.7 Rapporto, percentuale, proporzioni

3.52. *Trasforma i seguenti numeri percentuali in numeri decimali.*

$12\%;\quad 0{,}03\%;\quad 4{,}3\%;\quad 80\%;\quad 3{,}5\%;\quad -0{,}2\%;\quad 15\%;\quad -0{,}38\%.$

3.53. *Trasforma i seguenti numeri decimali in percentuali.*

$-1{,}25;\quad 0{,}03;\quad -2{,}\overline{1};\quad 0{,}\overline{13};\quad 5{,}080;\quad 3{,}7\overline{52};\quad -0{,}38.$

3.54. *Trasforma i seguenti numeri percentuali in frazioni ridotte ai minimi termini.*

$12\%;\quad 0{,}03\%;\quad 4{,}3\%;\quad 80\%;\quad 3{,}5\%;\quad -0{,}2\%;\quad 15\%;\quad -0{,}38\%.$

3.55. *Trasforma le seguenti frazioni in numeri percentuali.*

$$-\frac{3}{2};\quad \frac{4}{3};\quad -\frac{6}{5};\quad \frac{2}{25};\quad \frac{5}{8};\quad \frac{5}{6};\quad -\frac{5}{12}.$$

3.56. *A una scuola di ballo si sono iscritte 120 persone; il 20% frequentano i corsi di ballo liscio. In quanti frequentano i corsi di liscio?*

3.57. *Una scuola attiva dei corsi di lingue. 32 studenti si iscrivono al corso di inglese, 24 al corso di francese e 16 al corso di tedesco. Qual è la percentuale degli alunni iscritti al corso di inglese, rispetto al totale degli iscritti?*

3.58. *A una scuola di ballo sono iscritte 120 persone. Di queste il 68% sono donne. Quanti sono gli uomini?*

3.59. *Una bici viene venduta con uno sconto del 10%, il prezzo di listino prima dello sconto era 175 €. Quanto costa ora?*

3.60 (*). *Una canna da pesca da 125 € è in vendita promozionale a 70 €. Qual è la percentuale di sconto applicata?* [44%]

3.61 (*). *Per l'acquisto di un armadio Maria è riuscita a spuntare, dopo lunghe discussioni, uno sconto del 25% risparmiando ben 120 €. Qual era il prezzo senza sconto?* [480]

3.62. *Completa la seguente tabella.*

Prezzo di listino (€)	Sconto (€)	sconto (%)	Prezzo scontato (€)
120	12	10	108
125	5		
1 100		15	
12 000			700
	15	15	
	30		50
		25	140
	120	30	

3.63. *Calcola:*

a) il 10% di 100
b) il 30% di 700
c) il 20% di 500
d) il 15% di 150
e) il 25% di 1250
f) il 16% di 120
g) il 18% di 1700
h) il 14% di 3570
i) il 47% di 7480

3.64. *Quale percentuale è:*
a) 10 bocciati su 120 alunni: la percentuale di bocciati è ……;
b) 15 alunni su 45 giocano a calcio: la percentuale di alunni che giocano a calcio è ……;
c) 10 alunni su 28 suonano il piano: la percentuale di alunni che suonano il piano è ……;
d) 20 alunni su 120 frequentano il corso di teatro: la percentuale di alunni che fanno teatro è ……

3.65. *Se aumenta il prezzo:*

a) *il pane lo scorso costava* 1,20 €/kg, *quest'anno è aumentato del* 3%, *allora costa* …… €/kg;

b) *la benzina costava* 1,514 €/l, *quest'anno costa* 1,629 €/l *allora è aumentata del* ……%;

c) *il latte lo scorso anno costava* 1,25 €/l, *quest'anno è aumentato di* 0,05%, *allora costa* … … €/l;

d) *il parmigiano costava* 23,50 €/kg *quest'anno costa* 25,80 €/kg *allora è aumentato del* ……%.

3.66. *Se il prezzo diminuisce:*

a) *i pomodori costavano* 1,20 €/kg, *quest'anno sono diminuiti del* 5%, *allora costano* … … €/kg;

b) *i peperoni costavano* 2,10 €/kg, *quest'anno costano* 1,80 €/kg *allora sono diminuiti del* ……%;

c) *la cicoria costava* 0,80 €/kg, *ora due chili costano* 1,20 €, *il prezzo è diminuito del* ……%;

d) *le arance costava* 1,40 €/kg, *quest'anno sono diminuite del* 15%, *allora costano al chilo* … … €/kg

3.67. *Dato il costo di un oggetto IVA esclusa, calcola il prezzo IVA inclusa.*

Costo IVA esclusa (€)	IVA (%)	Costo IVA inclusa (€)
130	21	
1 250	21	
17,40	4	
	21	170
	21	12 240
101,00		105,60

3.68. *Dati imponibile (costo senza IVA) e IVA determina il costo comprensivo di IVA, e viceversa*

Imponibile (€)	IVA (%)	IVA (€)	Totale
100	21	21	121
1 100	21		
	23		1 100
1 000			1 100
	21	141	
1 100		100	

3.69. *La seguente tabella riporta i dati relativi alla provenienza di una classe prima di una scuola secondaria.*

	Scuola di provenienza			
Sesso	Scuola A	Scuola B	Scuola C	Altre scuole
M	6	4	4	2
F	5	3	4	2

a) *Qual è la percentuale di alunni provenienti dalla Scuola A?*

b) *qual è la percentuale di maschi provenienti dalla Scuola C?*

c) *qual è la percentuale di alunni che non provengono dalle scuole A o B o C?*

d) *qual è la percentuale di alunni che provengono dalle scuola A o C?*

3.70. *Agli esami di stato un gruppo di allievi (A) ha riportato i seguenti punteggi (P) in centesimi.*

P	60	64	68	70	74	75	80	82	83	84	85	86	87	88	89	90	92	94	98	100
A	2	3	1	5	4	2	1	2	3	2	4	1	3	2	1	3	2	4	6	8

Per poter partecipare a un concorso occorre aver conseguito il diploma con un punteggio superiore a 75. Quale percentuale di diplomati potrà partecipare al concorso? Se solo il 10% di quelli che si sono presentati al concorso lo hanno superato, quanti degli allievi hanno superato il concorso?

3.71. *Tra i dipendenti di un'azienda si effettua un sondaggio per decidere se è opportuno introdurre un nuovo tipo di turno di lavoro. Nella tabella sono riportati i risultati del sondaggio.*

	favorevoli	contrari
uomini	75	49
donne	81	16

a) Tra le donne, qual è la percentuale di lavoratrici favorevoli al nuovo turno?
b) qual è la percentuale di lavoratori (uomini e donne) che non sono favorevoli al nuovo turno?

3.72. *Sapendo che* $\overline{AB} = 12\,\text{cm}$ *e che* $\overline{BC} = \frac{3}{4}\overline{AB}$ *calcola la lunghezza di BC*

3.73. *Sapendo che* $\overline{AB} = 36\,\text{cm}$ *e che* $\overline{AB} = \frac{6}{5}\overline{BC}$ *calcola la lunghezza di BC*

3.74. *Sapendo che* $\overline{AB} + \overline{BC} = 15\,\text{cm}$ *e che* $\overline{AB} = \frac{2}{3}\overline{BC}$ *calcola le lunghezze di AB e BC*

3.75. *Sapendo che* $\overline{AB} - \overline{BC} = 4\,\text{cm}$ *e che* $\overline{AB} = \frac{4}{3}\overline{BC}$ *calcola le lunghezze di AB e BC*

3.76. *Determina le ampiezze di due angoli complementari sapendo che uno è la metà dell'altro.*

3.77. *La superficie della Toscana è divisa tra le seguenti provincie, calcola per ciascuna di esse la percentuale del territorio posseduta: Arezzo* ($3\,235\,\text{km}^2$)*, Firenze* ($3\,514\,\text{km}^2$)*, Grosseto* ($4\,504\,\text{km}^2$)*, Livorno* ($1\,211\,\text{km}^2$)*, Lucca* ($1\,773\,\text{km}^2$)*, Massa e Carrara* ($1\,156\,\text{km}^2$)*, Pisa* ($2\,444\,\text{km}^2$)*, Pistoia* ($965\,\text{km}^2$)*, Prato* ($365\,\text{km}^2$)*, Siena* ($3\,821\,\text{km}^2$)*.*

3.78. *La superficie della Terra è per il 70% ricoperta di acqua e per il 30% di terraferma. Per* $1/5$ *la terraferma è coperta da ghiaccio e deserto, per* $2/3$ *da foreste e montagna. La parte rimanente è terreno coltivato. Qual è in percentuale la parte della superficie terrestre coltivata?*

3.79 (*). *In* $30\,\text{kg}$ *di sapone concentrato al 30% quanta acqua e quanto sapone ci sono?* [$21\,\text{kg}$, $9\,\text{kg}$]

3.80. *Una soluzione di* $6\,\text{kg}$ *è concentrata al 45%. Quanta sostanza concentrata devo aggiungere per avere una nuova soluzione concentrata al 60%.*

3.81. *Quanta acqua bisogna aggiungere a una soluzione di* $2\,\text{kg}$ *concentrata al 12% per ottenere una nuova soluzione concentrata al 10%?*

3.82. *Si hanno due soluzioni delle stesse sostanze, una concentrata al 10% e l'altra al 30%. In quale proporzione occorre miscelare le due soluzioni in modo da ottenere* $6\,\text{kg}$ *di soluzione concentrata al 15%?*

3.83. *Una persona paga un tappeto* 1200 €*, lo stesso tappeto l'anno precedente costava* 900 €*. Quanto è stato l'aumento percentuale da un anno all'altro?*

3.84. *Quanto vale il 2012% di 2012?*

3.85. *Verifica se i gruppi di numeri formano nell'ordine scritto una proporzione.*

a) $\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$ *b*) $\frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}$ *c*) 35; 7; 48; 6 *d*) 14; 3,5; 4; 1 *e*) $\frac{1}{5}; \frac{4}{3}; \frac{4}{27}; \frac{8}{9}$

3.86. *Applica la proprietà fondamentale delle proporzioni per verificare quale delle seguenti scritture formano una proporzione.*

a) $10 : 11 = 12 : 13$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$

b) $7 : 14 = 21 : 42$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$

c) $64 : 48 = 8 : 6$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$

d) $18 : 15 = 12 : 10$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$

e) $10 : 6 = 5 : 3$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$

f) $1{,}2 : 1{,}4 = 3{,}6 : 4{,}2$ $\boxed{\text{Sì}}$ $\boxed{\text{No}}$

3.87. *Disponi opportunamente i numeri in modo che formino una proporzione.*

a) *7 5 20 28;*
b) *8 3 2 12;*
c) *5 6 2 15;*
d) *3 5 9 15;*
e) *6 7 2 21;*
f) *3 8 6 16.*

3.88. *Completa la seguente tabella.*

1° termine	*2° termine*	*Antecedente*	*Conseguente*	*Rapporto*	*Rap. inverso*
32	*8*	*32*	*8*	$32 : 8 = 4$	$\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
12	*13*				
$\frac{3}{5}$	*3*				
				$\frac{1}{4} : \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$	
					$\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$

3.89. *Completa la seguente tabella.*

Proporzione	*Antecedenti*	*Conseguenti*	*Medi*	*Estremi*	*Valore rapporto*
$3 : 5 = 21 : 35$	*3 e 21*	*5 e 35*	*5 e 21*	*3 e 35*	*0,6*
$54 : 12 = 36 : 8$					
$7 : 21 = 9 : 27$					
$\frac{5}{4} : \frac{15}{8} = 4 : 6$					

3.90. *Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.*

a) $269\ 2 : 24 = 3 : x$

b) $x : 0{,}\overline{6} = 0{,}8 : 1{,}\overline{3}$

c) $\frac{7}{3} : x = \frac{4}{3} : \frac{8}{35}$

d) $\left(1 - \frac{5}{12}\right) : \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) = x : \left(\frac{9}{8} - \frac{5}{8}\right)$

3.91. *Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.*

a) $\left(\frac{3}{20} + \frac{3}{8}\right) : x = \left(1 - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{11}{3} + \frac{1}{7}\right)$

b) $\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) : \left(\frac{5}{8}+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\right) : x$

c) $\left(\frac{4}{5}+1\right) : \left(3-\frac{1}{5}\right) = x : \left(2+\frac{1}{3}\right)$

3.92 (*). *Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.*

a) $\left(\frac{5}{3}+\frac{8}{3}-3\right) : x = x : \left(1+\frac{5}{16}+\frac{3}{8}\right)$ $\left[\pm\frac{3}{2}\right]$

b) $\left\{\frac{5}{2} : \left[\frac{1}{2}\cdot\left(3+\frac{1}{3} : \frac{5}{3}-\frac{14}{5}\right)\right]\right\} : x = x : \left\{\frac{3}{11}\left[\left(5-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{2}{21}+\frac{3}{2}\right]\right\}$ $\left[\pm\frac{5}{2}\right]$

c) $(70-x) : 6 = x : 8$ $[40]$

d) $\left(\frac{5}{6}-x\right) : \left(1-\frac{1}{2}\right) = x : \left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)$ $\left[\frac{25}{48}\right]$

Esercizi riepilogativi

3.93. *Esegui le seguenti operazioni con le frazioni, quando è possibile.*

a) $\frac{2}{3}\cdot 0$	*e)* $\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{2}$	*i)* $\frac{2}{3}-0$	*m)* $\frac{1}{4} : 4$
b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$	*f)* $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	*j)* $1 : \frac{2}{3}$	*n)* $\frac{(-2)^{-2}}{(-1)^{-1}}$
c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{0}$	*g)* $\frac{2}{3} : 0$	*k)* $\frac{1}{4}\cdot 4$	*o)* $1{,}5 : 1{,}\overline{5}$
d) $0{,}3 : 3$	*h)* $1{,}5 : 1{,}5$	*l)* $1{,}5^0$	*p)* $(1-1)^0$

3.94. *Verifica le seguenti uguaglianze trovando la frazione generatrice.*

$$\frac{1{,}\overline{7}}{1{,}\overline{3}} = 1{,}\overline{3};\qquad \frac{2{,}\overline{7}}{1{,}\overline{6}} = 1{,}\overline{6};\qquad \frac{1{,}\overline{16}}{2{,}\overline{3}} = 0{,}5;\qquad \frac{2{,}\overline{3}}{1{,}\overline{6}} = 1{,}4.$$

3.95. *Sottolinea le frazioni equivalenti a* $\frac{3}{5}$ *tra le seguenti.*

$$\frac{6}{10};\qquad \frac{25}{100};\qquad \frac{12}{10};\qquad \frac{5}{25}.$$

3.96. *Completa le seguenti uguaglianze.*

a) $\frac{3}{5} = \frac{\dots}{10}$ *b)* $\frac{75}{10} = \frac{\dots}{100}$ *c)* $\frac{7}{\dots} = \frac{1}{2}$ *d)* $3 = \frac{24}{\dots}$

3.97. *Completa:*

$$\frac{3}{4}+\dots = 1;\qquad 1-\dots = \frac{4}{13};\qquad \frac{11}{12}\cdot\dots = \frac{8}{55};\qquad \dots : \frac{5}{3} = \frac{3}{5}.$$

3.98. *Correggi le seguenti operazioni.*

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{7} = \frac{3\cdot 7+4\cdot 2}{4+7};\qquad \frac{8}{25}-\frac{3}{10} = \frac{8-3}{50};\qquad 3\cdot\frac{11}{13} = \frac{33}{39}.$$

3.99. *Rappresenta su una opportuna retta numerica le seguenti frazioni.*

$$\frac{3}{4};\quad \frac{3}{8};\quad \frac{1}{3};\quad \frac{5}{4};\quad \frac{2}{5};\quad \frac{6}{3};\quad \frac{5}{6};\quad \frac{12}{4};\quad \frac{19}{8};\quad \frac{16}{5}.$$

3.100. *Calcola le seguenti operazioni fra numeri razionali.*

a) $1{,}\overline{6}+\frac{2}{3}$

b) $5{,}1-\ 1{,}\overline{5}$

c) $0{,}03+\frac{0}{3}$

d) $0{,}1\overline{6}-\ 1{,}\overline{45}$

e) 3,999 + *un centesimo*

f) $7{,}9892+3{,}1218$

g) $2\%+5\%$

h) $50\%+\frac{1}{2}$

i) $\frac{2}{5}-1{,}2+5\%$

j) $-1{,}\overline{2}+25\%+\frac{5}{18}$

k) $\frac{3}{2}-13\%+0{,}15$

l) $2\%\cdot 5\%$

m) $1{,}\overline{2}+1{,}2+\frac{1}{2}+1{,}2\%$

n) $-1{,}\overline{1}\cdot\frac{18}{5}$

o) $-\frac{3}{4}\cdot 1{,}4\cdot 30\%$

p) $2\%\ :\ 5\%$

q) $-1{,}\overline{1}\ :\ \frac{18}{5}$

r) $\frac{1}{2}\ :\ 0{,}5$

3.101 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $\left(-1+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\right)$ $\left[-\frac{2}{11}\right]$

b) $\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)$ $\left[\frac{1}{24}\right]$

c) $\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right):\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

d) $\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)+\frac{3}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{7}{30}-\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{6}\right]$ $\left[-\frac{3}{20}\right]$

3.102 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{5}+\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{12}{7}-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{6}\right]$ $\left[-\frac{673}{1680}\right]$

b) $\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{5}-\frac{3}{4}:\left[0{,}75-\frac{5}{6}\right]$ $\left[\frac{31}{3}\right]$

c) $\frac{1}{3}:\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{6}-\frac{1}{15}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

d) $-\left(\frac{3}{4}+1{,}4\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\right)+\frac{6}{5}$ $\left[\frac{55}{96}\right]$

3.103 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{6}\right)-\left(1+\frac{5}{6}\right):\left(2-\frac{1}{3}\right)$ $\left[-\frac{8}{5}\right]$

b) $\left(\frac{5}{3}-\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}+\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)\cdot\frac{5}{2}\right]^2$ $\left[-\frac{46}{45}\right]$

c) $\frac{63}{55}\cdot\frac{44}{45}+\frac{14}{75}\cdot\frac{15}{35}+\frac{2}{25}\cdot 10-\frac{16}{25}:\frac{3}{5}+\frac{1}{15}$ $[1]$

d) $\left\{\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right]:\frac{1}{4}\right\}-\frac{2}{3}\cdot(-0{,}6)$ $\left[\frac{13}{5}\right]$

3.104 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $\frac{4}{5}-\frac{27}{7}\cdot\frac{1}{12}+\frac{8}{21}:\frac{8}{6}+\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{7}-\frac{9}{14}+\frac{1}{7}-\frac{12}{25}:\frac{3}{5}$ $\left[\frac{11}{28}\right]$

b) $\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{7}{2}-\left(\frac{10}{18}-\frac{7}{15}\right):\frac{2}{9}\right]:\frac{14}{15}\cdot\frac{1}{4}+1$ $\left[\frac{15}{14}\right]$

c) $\left[\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{10}\right):\frac{37}{5}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\right]^2:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{12}\right)^2\right]$ $\left[\frac{1}{50}\right]$

d) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{7}{5}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{7}\right):\frac{2}{14}-\frac{1}{400}$ $\left[-\frac{1}{6}\right]$

3.105 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $\left(3-\frac{18}{5}-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)-\frac{2^2}{3}+\frac{1}{60}$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

b) $\left(\frac{3}{5}-1\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{5}-\frac{17}{20}\right)+\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{5}\right):\frac{4}{15}-\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}:\frac{1}{5}\right):\frac{22}{17}-\frac{3}{10}$ $[10]$

c) $\frac{19}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{2}-2\right):\left(\frac{3}{10}-1{,}25\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-1\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2$ $\left[\frac{13}{15}\right]$

d) $\left[\left(1+\frac{1}{2}\right):3-\left(2+\frac{3}{2}\right)+1\right]+\left(3-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)-1\left(-2+\frac{3}{2}\right)^2$ $\left[\frac{11}{6}\right]$

3.106 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right)\right]-\left[\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\right]$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

b) $2-\left[3+1-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]-\left(-2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\left[-\frac{1}{12}\right]$

c) $\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{6}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)+\frac{10}{8}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\frac{1}{6^2}$ $\left[\frac{139}{40}\right]$

d) $\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left[\left(\frac{2}{5}\right)^8:\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2\right\}^2:\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^4$ $[1]$

3.107 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $1-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2:\left(\frac{3}{2}\right)^4-\left(\frac{4}{5}\right)^3:\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4:\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\frac{2^2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}-\frac{(-2)^{-2}}{5}-2^4$ $\left[\frac{9}{20}\right]$

c) $\left\{\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}:\left(\frac{6}{8}+1-\frac{3}{4}\right)\right]^3\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{5}\right\}:\frac{1}{5}$ $\left[\frac{10}{3}\right]$

d) $\left\{\frac{1}{2}+\frac{15}{2}:\left[\frac{1}{2}:\left(1-\frac{3}{4}\right)+1\right]\right\}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5:\left(\frac{1}{3}\right)^4\right]^2$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

3.108 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $\left\{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right)\cdot\frac{4}{5}\right]\cdot\frac{1}{14}\right\}^2:\left(1-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{10}\right)^2$ $\left[\frac{1}{144}\right]$

b) $\left[(0{,}4-1)^2:0{,}01-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$ $[540]$

c) $\frac{7}{23}\left\{\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{11}{16}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right):\left[\left(\frac{4}{7}+\frac{5}{4}\right):\frac{17}{7}\right]\right\}\cdot\frac{16}{21}$ $\left[\frac{154}{207}\right]$

d) $\left(2+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left[\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}$ $\left[\frac{46}{9}\right]$

3.109 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $\left[\left(3+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]:\left\{\frac{3}{2}-\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{11}+\frac{5}{22}+\frac{7}{33}\right):\frac{82}{33}+\frac{1}{12}\right]^5\right\}^3:\frac{1}{4}$ $\left[\frac{44}{3}\right]$

b) $\left\{\left[\left(\frac{8}{3}\right)^{10}:\left(\frac{8}{3}\right)^{6}\right]^{2}\cdot\left[\left(\frac{8}{3}\right)^{8}:\left(\frac{8}{3}\right)^{3}\right]\right\}:\left(\frac{8}{3}\right)^{11}$ $\left[\frac{64}{9}\right]$

c) $\left(1+\frac{3}{2}\right)^{2}\cdot\left(2-\frac{5}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{-2}$ $[400]$

d) $\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{6}{5}-\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{5}\right)\cdot 3-\frac{1}{30}$ $\left[-\frac{2}{3}\right]$

3.110 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $\dfrac{\left(1+\frac{2}{3}\right):5+\left(2-\frac{2}{3}\right)}{3+\left(\frac{1}{2}-1\right)}:\dfrac{\left(5-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{7}{3}-\frac{2}{35}\right)}{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(3-\frac{1}{3}\right)}$ $\left[\frac{700}{2229}\right]$

b) $8{,}75\cdot\left(\frac{2}{5}-0{,}2\right)\cdot\left\{\left[2-1{,}\overline{6}-\left(0{,}2+\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{7}-\frac{17}{4}\right)\right\}-\frac{2}{3}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)+7{,}5-0{,}\overline{3}$
$[10]$

c) $\left[\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)^{2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{2}-\left(1+\frac{2}{3}-2\right)^{2}\right]^{2}:\left(\frac{10}{9}\right)^{2}-\left(1+\frac{8}{5}-\frac{1}{25}\right)$ $[-2]$

d) $\left(\frac{1}{6}+0{,}1\right)\div 0{,}16\cdot(1-1{,}0\overline{1})^{-1}$ $\left[-\frac{5}{11}\right]$

3.111 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $\dfrac{\left\{\left[\frac{1}{2}-\left(2-\frac{11}{4}\right)\right]:(-3{,}5)\right\}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right):7^{-2}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}(-3)^2(-1)^2:(-3)^2}$ $\left[-\frac{2}{27}\right]$

b) $\left(\frac{4}{3}-2\right)\left(-\frac{1}{2}\right):\left[\frac{5}{7}\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(2+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]:\frac{11}{6}$ $\left[-\frac{60}{11}\right]$

c) $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{-2}:\left(\frac{5}{2}-2\right)^{-3}$ $\left[\frac{8}{81}\right]$

3.112 (*). *Calcola il valore della seguente espressione.*

$\left\{\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^{3}:\left(\frac{2}{5}\right)^{4}\right]:\left(\frac{2}{5}\right)^{2}\right\}^{6}:\left\{\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{4}\cdot\left(\frac{7}{5}-1\right)^{2}\right]^{2}\cdot\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^{5}:\left(\frac{2}{5}\right)^{4}\right]^{2}\right\}^{2}$ $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-46}\right]$

3.113 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)\left(-1-\frac{1}{3}\right)+\left[\left(1+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(4-\frac{9}{2}\right)\right]\cdot\frac{3}{4}+3-\left(\frac{2}{27}\cdot\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\right)-\frac{9}{40}$ $[2]$

b) $\left[0{,}625+4{,}5\cdot(0{,}75-0{,}\overline{6})\right]:\left[0{,}875+0{,}75\cdot(2{,}5-2{,}\overline{3})\right]$ $[1]$

c) $\left\{3-\left[0{,}\overline{6}-\left(0{,}1\overline{6}+\frac{5}{12}\right)\right]:0{,}25\right\}^{2}\cdot(0{,}\overline{6}-0{,}625)$ $\left[\frac{8}{27}\right]$

d) $\left(\frac{12}{9}-1\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{81}:3\right)^{-1}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{4}\right)^{3}\cdot\left[-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{5}{49}-\frac{3}{147}\right)\right]-\frac{1}{(-4)^2}$ $\left[\frac{25}{4}\right]$

3.114 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $\left[0{,}1\overline{6}+(0{,}1\overline{36}+0{,}41\overline{6}-0{,}\overline{227}):0{,}\overline{390}\right]:\left[0{,}\overline{36}+2.25\cdot(0{,}\overline{5}-0{,}\overline{27})\right]$ $[1]$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}-\frac{\left(\frac{1}{3}+0{,}5\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}-0{,}5\right)^{-2}}+\left(\frac{0{,}5-0{,}1}{1-0{,}5}\right)^{-2}-4^{-2}$ $\left[-\frac{9}{2}\right]$

c) $\dfrac{1{,}6-0{,}5\cdot(0{,}\overline{6}-0{,}5):(1-0{,}\overline{6})^2-0{,}7}{3\cdot(1-0{,}5)^2+0{,}875-(1-0{,}5)^2:0{,}2-0{,}6\cdot 0{,}5}$ $[2]$

d) $0{,}1\overline{6}^{-2}+\left[1{,}5:1{,}5^2+\left(1{,}\overline{6}-0{,}5\right):\left(2-0{,}\overline{3}\right)+\left(0{,}\overline{6}+0{,}5-0{,}2\right)\cdot 0{,}75:5{,}8\right]\cdot 0{,}\overline{6}$ $\left[\frac{38}{45}\right]$

3.115 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $\left\{0{,}8\overline{3}-\left[0{,}\overline{6}+(0{,}75-0{,}\overline{6}^{-2}-(1-2{,}\overline{3}\cdot 0{,}25))\right]+0{,}\overline{6}:0{,}\overline{8}\right\}:1{,}02\overline{7}$ $\left[\frac{40}{37}\right]$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{13^2-12^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{24}}$ $\left[\frac{1}{15}\right]$

c) $\sqrt{20-2\cdot(2+3)+(2+1)\cdot 5}+\sqrt{48:6-3\cdot 2+10:5}$ $[7]$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{9}\cdot\left\{\left[\dfrac{11}{3}-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)\right]:\left[\left(2-\dfrac{7}{4}\right)+\dfrac{10}{3}\right]\right\}}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

3.116 (*). *Calcola il valore delle seguenti espressioni.*

a) $\sqrt{\left\{\left[\left(\dfrac{5}{4}\right)^2:\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right]\left[\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{20}\right)\cdot\dfrac{4}{5}\right]\cdot\dfrac{1}{4}\right\}^2:\left(1-\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{3}{10}\right)^2}$ $\left[\frac{7}{3}\right]$

b) $\left(1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^{-2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)^2\cdot\left(4-\dfrac{9}{2}\right)^{-3}$ $\left[-\frac{8}{81}\right]$

3.117. *Calcola il valore dell'espressione $E=A-B$, dove*

$$A=\left(\left(\left(-\frac{3}{7}\right)^4:\left(-\frac{7}{3}\right)^{-2}\right)\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right)^{-2},\qquad B=\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{-6}\cdot\left(1-\frac{4}{7}\right)^5\right)^2.$$

3.9 Problemi

3.118. *La distanza Roma - Bari è di* 450 km *Se ho percorso i* 2/5 *del tragitto quanti chilometri mancano ancora da percorrere?*

3.119. *Lucia ha letto* 3/5 *di un libro, le rimangono da leggere 120 pagine. Quante pagine ha il libro?* *[300]*

3.120. *Una persona possiede* 525 €*. Se spende i* 3/5 *della somma e poi i* 2/3 *della rimanente, quale somma di denaro gli rimane?*

3.121. *Luigi ha 18 anni, cioè i* 3/7 *dell'età di sua madre, che a sua volta ha i* 4/5 *dell'età del marito. Quali sono l'età del padre e della madre di Luigi?*

3.122. *L'età di Paolo è i* 4/11 *di quella della madre che ha* 55 *anni. Quanti anni ha Paolo?* *[20]*

3.123. *In un'azienda* 7/20 *degli impiegati sono addetti contabilità. Qual è la percentuale degli addetti contabilità rispetto a tutti gli impiegati azienda?* [35%]

3.124. *A un gruppo dipersone è stato chiesto quale quotidiano leggono. Le risposte sono state le seguenti:*

- *90 leggono "La Repubblica";*
- *30 leggono "Domani";*
- *70 leggono "La stampa";*
- *10 leggono "La gazzetta dello sport".*

Trasforma in percentuali i dati ottenuti. [45%; 15%; 35%; 5%]

3.125. *Un televisore a* 16/9 *ha la base di* 70 cm. *Quanti pollici misura l'altezza?* [$315/8\,\text{cm} = 39{,}375\,\text{cm}$]

3.126. *A un concorso si sono presentati 568 candidati, 22 hanno superato il concorso. Qual è stata la percentuale dei candidati che non hanno superato il concorso?* [96%]

3.127. *In un supermercato si vende il pomodoro pelato a €0.69 in confezioni da* 500 g *e a €0.89 in confezioni da* 750 g *Qual è la percentuale di sconto che usufruisce chi compra la confezione da mezzo chilo?* [14%]

3.128. *Per preparare una torta bisogna mettere 3 parti di zucchero ogni 8 parti di farina. Se si utilizzano* 500 g *di farina, quanto zucchero bisogna utilizzare?* [187 g]

3.129. *Anna entra in una cartoleria e compra 2 penne, di cui una costa il doppio dell'altra; riceve lo sconto 15% sulla penna più costosa e del 30% su quella meno costosa. Qual è lo sconto che riceve complessivamente?* [23%]

3.130. *Per pavimentare una piazza 8 operai impiegano 10 giorni lavorando 8 ore al giorno; quanti giorni impiegherebbero 5 operai se lavorassero 6 ore al giorno?* [24]

3.131. *Pierino si reca in un negozio di giocattoli, dove ne acquista uno. A Pierino vengono offerti due tipi di sconti, da usare in sequenza: uno del 10% e uno del 40%. In quale ordine converrà ricevere i due sconti? Spiega il motivo.* [è uguale]

3.132. *Un ingegnere incassa per la realizzazione di un progetto una certa somma. Di essa il 0,23% deve essere restituita allo stato come IVA e della parte rimanente il 0,4% deve essere pagata come tasse. Qual è la percentuale della somma che rimane all'ingegnere?* [0,48%]

3.133. *Nel paese di Vattelapesca il 20% degli abitanti è europeo il restante 80% è asiatico. La lingua inglese è parlata dal 50% degli europei e dal 40% degli asiatici. Se a Vattelapesca 5 930 persone parlano inglese, quanti sono gli abitanti di Vattelapesca?* [18 500]

3.134. *Un liquido viene filtrato con un primo filtro che toglie il 40% delle impurità. Successivamente viene filtrato con un secondo filtro che toglie il 30% delle impurità. Infine viene filtrato con un terzo filtro che elimina il 50% delle impurità. Quale percentuale complessiva delle impurità è stata eliminata?* [21%]

3.135. *Una prova di ammissione consiste di due test. Solo i 2/3 dei candidati superano il primo test e 1/5 di quelli che hanno superato il primo test superano anche il secondo. Qual è la percentuale di candidati che hanno superato tutti e due i test?* [20%]

3.136. *L'acquisto di un'auto può essere fatto con due tipi di pagamento: pagando l'intero importo di* 24000 € *all'acquisto il 1° gennaio 2021; oppure dividendo il pagamento in tre rate annuali di 8150, da pagare il 1° gennaio 2021, il 1° gennaio 2022, il 1° gennaio 2023. Avendo tutto il denaro su un conto corrente bancario* *a un interesse annuo del 0.01% quale forma di pagamento è più vantaggiosa? Di quanto?* [*pagamento a rate:* 24 205,5]

3.137. *Una forte influenza ha colpito il 56% dei bambini di età inferiore o uguale a 10 anni e il 16% delle persone di età maggiore. Se la percentuale di persone che si sono ammalate di questa influenza è stata del 21%, qual è la percentuale di bambini in quella popolazione?* [12,5%]

3.138. *Una ragazza, di* 48 kg*, va dal dietologo, che le consiglia di restare entro il 5% del peso attuale. Tra quali valori può oscillare il suo peso?* [$45{,}6 < peso < 50{,}4$]

3.139. *Per raccogliere le foglie cadute nel cortile della scuola, Aura impiega 6 ore, Bruno 8 ore, Carlo 12 ore. Se i tre si mettessero a lavorare insieme, in quante ore pulirebbero il cortile?* [2 : 40]

pesa 1/2

3.140. *Un oggetto è costituito da una lega di zinco e rame. Il suo peso è di* 280 g *e la percentuale di rame è il 20%. Quanti grammi di zinco contiene?* [. . .]

3.141. *Un misurino contiene 1/8 di kg di farina. Quanti misurini di farina sono necessari per riempire un sacchetto di* 5 kg*?* [. . .]

3.142. *In un'azienda 3/10 degli impiegati sono addetti contabilità. Qual è la percentuale degli addetti contabilità rispetto a tutti gli impiegati azienda?* [. . .]

3.143. *A un gruppo di 200 intervistati è stato chiesto quale quotidiano leggono. Le risposte sono state le seguenti:*

- *90 leggono "La Repubblica";*
- *70 leggono "Il Corriere della sera";*
- *30 leggono "La stampa";*
- *10 leggono "La gazzetta dello sport".*

Trasforma in percentuali i dati ottenuti. [. . .]

3.144. *Un televisore a 16/9 ha la base di 18 pollici. Quanti pollici misura l'altezza?* [. . .]

3.145. *A un concorso si sono presentati 324 candidati. 22 hanno superato il concorso. Qual è stata la percentuale dei candidati che non hanno superato il concorso?* [. . .]

3.146. *In un supermercato si vende il pomodoro pelato a* 0,60 € *in confezioni da* 250 g *e a 1,00 euro in confezioni da* 500 g *Qual è la percentuale di sconto che usufruisce chi compra la confezione da mezzo chilo?* [. . .]

3.147. *Per preparare una torta bisogna mettere 3 parti di zucchero ogni 4 parti di farina. Se si utilizzano 500g di farina, quanto zucchero bisogna utilizzare?* [. . .]

3.148. *Anna entra in una cartoleria e compra due penne, di cui una costa il doppio dell'altra; riceve lo sconto 15% sulla penna più costosa e del 40% su quella meno costosa. Qual è lo sconto che riceve complessivamente?* [21%]

3.149. *Per pavimentare una piazza 8 operai impiegano 10 giorni lavorando 8 ore al giorno; quanti giorni impiegherebbero 5 operai se lavorassero 6 ore al giorno?* [. . .]

3.150. *Pierino si reca in un negozio di giocattoli, dove ne acquista uno. A Pierino vengono offerti due tipi di sconti, da usare in sequenza: uno del 10% e uno del 35%. In quale ordine converrà ricevere i due sconti? Spiega il motivo.* [. . .]

3.151. *Un ingegnere incassa per la realizzazione di un progetto una certa somma. Di essa il 20% deve essere restituita allo stato come IVA e della parte rimanente il 40% deve essere pagata come tasse. Qual è la percentuale della somma che rimane all'ingegnere?* [. . .]

3.152. *Nel paese di Vattelapesca il 20% degli abitanti è europeo il restante 80% è asiatico. La lingua inglese è parlata* *dal 50% degli europei e dal 40% degli asiatici. Se a Vattelapesca 5 930 persone parlano inglese, quanti sono gli abitanti di Vattelapesca?* [...]

3.153. *Un liquido viene filtrato con un primo filtro che toglie il 40% delle impurità. Successivamente viene filtrato con un secondo filtro che toglie il 30% delle impurità. Infine viene filtrato con un terzo filtro che elimina il 50% delle impurità. Quale percentuale complessiva delle impurità è stata eliminata?* [...]

3.154. *Una prova di ammissione consiste di due test. Solo i 2/3 dei candidati superano il primo test e 1/5 di quelli che hanno superato il primo test superano anche il secondo. Qual è la percentuale di candidati che hanno superato tutti e due i test?* [...]

3.155. *L'acquisto di un'auto può essere fatto con due tipi di pagamento: pagando l'intero importo di* 23 000 € *all'acquisto il 1° gennaio 2011; oppure dividendo il pagamento in tre rate annuali di 8000, da pagare il 1° gennaio 2011, il 1° gennaio 2012, il 1° gennaio 2013. Avendo tutto il denaro su un conto corrente bancario a un interesse annuo del 3% quale forma di pagamento è più vantaggiosa? Di quanto?* [...]

3.156. *Una forte influenza ha colpito il 60% dei bambini di età inferiore o uguale a 10 anni e il 15% delle persone di età maggiore. Se la percentuale di persone che si sono ammalate di questa influenza è stata del 20%, qual è la percentuale di bambini in quella popolazione?* [19,19%]

3.157. *Una ragazza, di* 46 kg*, va dal dietologo, che le consiglia di restare entro il 5% del peso attuale. Tra quali valori può oscillare il suo peso?* [...]

3.158. *Per raccogliere le foglie cadute nel cortile della scuola, Mario impiega 6 ore, Marco 10 ore, Matteo 15 ore. Se i tre si mettessero a lavorare insieme, in quante ore pulirebbero il cortile?* [...]

Numeri reali 4

4.1 Dai numeri naturali ai numeri irrazionali

Nel volume Algebra 1 abbiamo presentato i diversi insiemi numerici. Li riprendiamo brevemente per poi approfondire i numeri reali e le loro proprietà.

L'insieme dei *numeri naturali* racchiude i numeri che utilizziamo per contare; si indica nel seguente modo:

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, \ldots\}$$

Su questi numeri sono definite le seguenti operazioni:

- *addizione*: $n+m$ è il numero che si ottiene partendo da n e continuando a contare per altre m unità;
- *sottrazione*: $n-m$ è il numero, se esiste, che addizionato a m dà come risultato n;
- *moltiplicazione*: $n \cdot m$ è il numero che si ottiene sommando n volte m, o meglio sommando n addendi tutti uguali a m
- *divisione*: $n : m$ è il numero, se esiste, che moltiplicato per m dà come risultato n;
- *potenza*: n^m è il numero che si ottiene moltiplicando m fattori tutti uguali a n con $m \geq 2$, ponendo $n^1 = n$ e $n^0 = 1$;
- *radice*: $\sqrt[n]{m}$ con $n \geq 2$ è il numero, se esiste, che elevato a n dà come risultato m.

L'addizione, la moltiplicazione e la potenza sono definite su tutto l'insieme dei numeri naturali, cioè dati due numeri naturali qualsiasi, n ed m, la somma $n+m$ e il loro prodotto $n \cdot m$ e la loro potenza n^m, escluso il caso 0^0, danno come risultato un numero naturale. Non sempre invece, la differenza $n-m$, il quoziente $n : m$ o la radice $\sqrt[n]{m}$ di due numeri naturali danno come risultato un numero naturale.

Tuttavia, dal punto di vista pratico-applicativo molto spesso si incontrano situazioni nelle quali occorre eseguire sempre operazioni. Iniziamo dall'operazione di sottrazione. Sappiamo che in tante situazioni di natura economica, ma non solo, deve essere possibile sottrarre un numero da uno più piccolo. Deve essere possibile, per esempio, comprare un'auto che costa 12.000 euro anche quando in banca possediamo solo 10.000 euro. Deve quindi essere possibile eseguire una sottrazione del tipo $10.000 - 12.000$. Il risultato di questa operazione non va poi confuso con il risultato di $12.000 - 10.000$. Nel secondo caso, infatti, significa che sul nostro conto corrente abbiamo 12.000 euro e dobbiamo spenderne 10.000, ci rimangono quindi 2.000 euro. Nel primo caso invece, possediamo 10.000 euro e dobbiamo pagare 12.000 euro ci rimane un debito di 2.000 euro. Per distinguere i due tipi di numeri i matematici mettono davanti al numero il segno $+$ o il segno $-$. Si genera così l'insieme dei *numeri interi*.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$$

Su questi numeri l'operazione di sottrazione è ovunque definita, in altre parole il risultato di qualunque sottrazione tra due numeri interi è un numero intero.

Non è invece possibile eseguire sempre le divisioni. Oltre ai casi $n : 0$ e $0 : 0$ che non sono definiti, solo in casi particolari è possibile dividere due numeri interi e ottenere come risultato un numero intero. Ad esempio $5 : 4$ non ha un risultato all'interno dell'insieme dei numeri interi. Esistono però tante situazioni reali in cui una divisione di questo tipo deve poter essere eseguita. Per esempio è possibile dividere in parti uguali 5 uova in 4 persone, basta fare una frittata in una padella tonda e dividere la frittata in quattro parti uguali, a ciascuna toccano $\frac{5}{4}$ di uovo. Deve essere possibile dividere in parti uguali 5 euro tra 4 persone. In tutto a ciascuno toccano 1 euro e 25 centesimi di euro: 1,25.

Per rappresentare il risultato di queste due operazioni di divisioni abbiamo usato nel primo caso la notazione frazionaria $\frac{5}{4}$ e nel secondo caso la notazione decimale 1,25. Le due scritture sono perfettamente equivalenti.

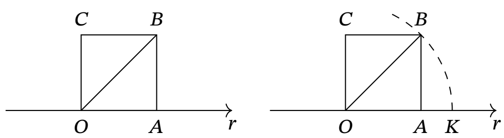
Per risolvere tutti i problemi di divisione i matematici hanno costruito l'insieme dei *numeri razionali* che indichiamo nel seguente modo:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \neq 0\right\} = \left\{0, +1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{11}{17}, \frac{129}{1725}, \ldots\right\}$$

Con questi numeri è possibile sempre eseguire l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione (ad eccezione della divisione per 0), la potenza. Non sempre, invece, è possibile eseguire l'estrazione di radice. Per esempio, hai già conosciuto il numero $\sqrt{2}$, cioè il numero che elevato al quadrato dà 2; esso non è un numero razionale, cioè non può essere scritto né sotto forma di frazione né sotto forma di numero decimale finito o periodico. I numeri di questo tipo si dicono *numeri irrazionali*.

Abbiamo già affrontato questo problema nel volume di Algebra 1; per comodità del lettore riportiamo il ragionamento.

Fissiamo sulla retta orientata r l'unità di misura e disegniamo il quadrato di lato 1. Ci proponiamo di calcolare la misura della sua diagonale OB.



Il triangolo OAB è retto in A, quindi per il teorema di Pitagora $\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$. Sostituiamo le misure: $\overline{OB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Per ottenere $\overline{OB}$ dobbiamo estrarre la radice quadrata e quindi $\overline{OB} = \sqrt{2}$.

Sappiamo che "estrarre la radice quadrata" di un numero, detto radicando, significa trovare quel numero che elevato al quadrato dà come risultato il radicando. Questo numero deve esistere, nel senso che esiste un punto sulla retta r che lo rappresenta, per costruirlo graficamente si può tracciare l'arco di circonferenza di centro O e raggio OB determinando su r il punto K estremo del segmento con $OK = OB$.

Dalla posizione del punto K possiamo dire che $1 < \sqrt{2} < 2$. Il valore cercato evidentemente non è un numero intero. Può essere un numero decimale finito? Compiliamo una tabella che contenga nella prima riga i numeri con una sola cifra decimale compresi tra 1 e 2 e nella seconda riga i rispettivi quadrati:

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
x^2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,89

Osserviamo che il numero 2 è compreso tra $1{,}4^2$ e $1{,}5^2$, di conseguenza $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, ma ancora non possiamo precisare il suo valore, anche se abbiamo ristretto l'intervallo in cui si trova il punto K. Diciamo che 1,4 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,5 è un valore approssimato per eccesso; scrivendo $\sqrt{2} = 1{,}4$ oppure $\sqrt{2} = 1{,}5$ commettiamo un errore minore di 1/10.

Per migliorare l'approssimazione e tentare di ottenere $\sqrt{2}$ come numero razionale costruiamo la tabella dei numeri decimali con due cifre compresi tra 1,4 e 1,5:

x	1,41	1,42	1,43	1,44
x^2	1,9881	2,0164	2,0049	2,0776

Ora possiamo dire che 1,41 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,42 è un valore approssimato per eccesso, con un errore dell'ordine di 1/100. Abbiamo quindi migliorato l'approssimazione e di conseguenza abbiamo ristretto l'intervallo in cui cade il punto K, ma ancora non abbiamo trovato un numero razionale che sia uguale a $\sqrt{2}$.

Continuando con lo stesso procedimento costruiamo due classi di numeri razionali che approssimano una per difetto e una per eccesso il numero cercato, restringendo ogni volta l'ampiezza dell'intervallo in cui cade il punto K. Il procedimento può continuare all'infinito e le cifre decimali che troviamo non si ripetono periodicamente.

Valore per difetto	Numero	Valore per eccesso	Ordine dell'errore
1	$\sqrt{2}$	2	10^0
1,4	$\sqrt{2}$	1,5	10^{-1}
1,41	$\sqrt{2}$	1,42	10^{-2}
1,414	$\sqrt{2}$	1,415	10^{-3}
1,4142	$\sqrt{2}$	1,4143	10^{-4}
…	$\sqrt{2}$	…	…

Si può dimostrare che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale con una elegante dimostrazione per assurdo.

Elevare un numero al quadrato significa elevare al quadrato le singole potenze dei fattori primi in cui questo si scompone. I fattori primi di a^2 e di b^2 sono gli stessi di a e di b con gli esponenti raddoppiati, Se a e b non hanno fattori in comune, anche a^2 e b^2 non li avranno. Quindi a^2 non può essere il doppio di b^2. Perciò $2 \neq \frac{a^2}{b^2}$ e $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$.

Oltre a $\sqrt{2}$ vi sono altri infiniti numeri che non possono essere scritti come frazione. Molte radici e alcuni numeri particolari come π, che corrisponde alla misura della circonferenza di diametro 1.

Questi numeri sono detti *numeri irrazionali* e costituiscono l'insieme $\mathbb{J}$ dei numeri irrazionali. L'unione degli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{J}$ è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

4.2 I numeri reali

In base a quanto abbiamo detto prima, essendo $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$, i numeri reali sono tutti quei numeri che si possono scrivere in forma decimale con un numero finito o infinito di cifre, non necessariamente periodiche. Per esempio, la frazione $\frac{17}{16}$ è uguale al numero decimale finito 1,0625. La frazione $\frac{16}{17}$ è uguale al numero decimale periodico $0,\overline{9411764705882352}$.

Il numero π è invece un numero decimale a infinite cifre non periodico. Riportiamo alcune cifre: $\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\,197\,169\,399\,375\,105\,820\,974\,944\,592\,307\,816\,406\,286\ldots$Nonostante i numeri irrazionali siano stati scoperti dallo stesso Pitagora o dai suoi allievi nel *IV* secolo *a.e.v.*, solo nel *XIX* secolo Augustin-Louis Cauchy e Richard Dedekind sono giunti a una formulazione rigorosa di numeri reali.

In effetti, assumere che i numeri reali sono tutti quelli che si possono scrivere in forma decimale finita o infinita, comporta dei problemi. Per esempio, gli algoritmi per addizionare, sottrarre e moltiplicare due numeri richiedono di cominciare dalla cifra più a destra, cosa che non è possibile per i numeri decimali che non finiscono mai.

È possibile costruire l'insieme dei numeri reali a partire dall'insieme dei numeri razionali dividendoli in due insiemi A e B con particolari caratteristiche:

1. $A \cap B = \varnothing$

2. $A \cup B = \mathbb{Q}$

3. $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$

Una coppia di insiemi con queste caratteristiche venne chiamato da Dedekind (1831-1916) una *sezione*, o *partizione* di $\mathbb{Q}$.

Dato che A e B devono avere intersezione nulla:

- se A ha un massimo B non può avere un minimo;
- se A non ha un massimo B può avere un minimo;
- A può non avere un massimo B può non avere un minimo;

Esempio 4.1: *Sezioni*

- *I due insiemi A e B così definiti:* $A = \{x \in \mathbb{Q}|\, x < 3\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{Q}|\, x \geq 3\}$ *definiscono una sezione di* $\mathbb{Q}$*, infatti* $A \cap B = \emptyset$ $A \cup B = \mathbb{Q}$ *e ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B; inoltre possiamo osservare che A non ammette massimo, non essendoci in esso un numero che sia maggiore di tutti gli altri, mentre B ammette il minimo che è 3;*
- *siano* $A = \{x \in \mathbb{Q}|\, x < -1\}$*,* $B = \{x \in \mathbb{Q}|\, x > 0\}$ *la coppia* (A, B) *non è una sezione di* $\mathbb{Q}$ *perché pur essendo* $A \cap B = \emptyset$ *non è* $A \cup B = \mathbb{Q}$
- *siano* $A = \left\{x \in \mathbb{Q}|\, x \leq \frac{2}{7}\right\}$*,* $B = \left\{x \in Q|\, x \geq \frac{2}{7}\right\}$*, anche in questo caso la coppia* (A, B) *non è una sezione di* $\mathbb{Q}$ *poiché* $A \cap B = \left\{\frac{2}{7}\right\}$
- *costruiamo gli insiemi A e B nel seguente modo: A sia l'unione tra l'insieme dei numeri razionali negativi e tutti i razionali il cui quadrato è minore di 2, in B mettiamo tutti i razionali il cui quadrato è maggiore di 2.* $A = \mathbb{Q}^- \cup \left\{x \in \mathbb{Q}|\, x^2 < 2\right\}$*,* $B = \left\{x \in \mathbb{Q}|\, x^2 > 2\right\}$*. Si ha* $A \cap B = \emptyset$ $A \cup B = \mathbb{Q}$*, inoltre ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B, dunque* (A, B) *è una sezione di* $\mathbb{Q}$*, ma A non possiede il massimo e B non possiede il minimo, in quanto abbiamo già dimostrato che non esiste un numero razionale che ha 2 come quadrato. Questa sezione individua un buco nell'insieme* $\mathbb{Q}$*.*

Definizione 4.1: *Si chiama* elemento separatore *di una partizione* (A, B) *di* $\mathbb{Q}$ *il massimo di A o il minimo di B, nel caso in cui almeno uno di questi elementi esista.*

Nel primo esempio, poiché esiste il minimo di B, la partizione (A, B) ammette un elemento separatore e identifica il numero razionale 3. Nel quarto esempio non esiste un numero razionale che fa da elemento separatore, la sezione (A, B) identifica un numero irrazionale.

Definizione 4.2: *L'insieme* $\mathbb{R}$ *dei numeri reali è l'insieme di tutte le partizioni di* $\mathbb{Q}$*. Chiamiamo numero razionale le partizioni che ammettono elemento separatore, chiamiamo* numero irrazionale *le sezioni che non ammettono elemento separatore.*

Ogni numero reale è individuato da due insiemi di numeri razionali che contengono, nel primo tutte le approssimazioni per difetto e il secondo tutte le approssimazioni per eccesso.

$\sqrt{2}$

Questa costruzione dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ a partire dall'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è puramente astratta e formale, non serve al calcolo, ma permette di collegare i nuovi numeri all'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

Nell'insieme delle partizioni di $\mathbb{Q}$ è possibile definire in modo rigoroso l'ordinamento e le operazioni, nella pratica si usano sempre delle approssimazioni, magari molto elevate.

Definizione 4.3: *Un insieme X si dice* continuo *se ogni partizione* (X', X'') *di X ammette uno e un solo elemento separatore, cioè se esiste un elemento x appartenente a X tale che per ogni x' di X' e per ogni x'' di X'' si ha $x' \leq x \leq x''$.*

Teorema 4.1 (di Dedekind): *Ogni partizione dell'insieme $\mathbb{R}$ di numeri reali ammette uno e uno solo elemento separatore.*

Da questo teorema segue che il numero reale è definito come l'elemento separatore di una sezione (A, B) di numeri reali.

Postulato 4.1 (di continuità della retta): *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti della retta geometrica e l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.*

Da questo postulato segue la possibilità di definire sulla retta un sistema di coordinate: ad ogni punto corrisponde un numero reale (la sua ascissa) e viceversa ad ogni numero reale è associato uno e un solo punto sulla retta; analogamente si ha nel piano dove il sistema di assi cartesiano permette di realizzare una corrispondenza biunivoca tra coppie di numeri reali (ascissa e ordinata del punto) e un punto del piano geometrico. Vedremo in seguito che la possibilità di associare numeri e punti si estende anche allo spazio geometrico.

4.3 Valore assoluto

Si definisce *valore assoluto* di un numero reale a, indicato con $|a|$, il numero stesso se a è positivo o nullo, il suo opposto se a è negativo.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{, se} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{, se} \quad a < 0 \end{cases}.$$

Il numero a si dice argomento del valore assoluto.

$|-3| = 3$ $\qquad$ $|+5| = 5$ $\qquad$ $|0| = 0$.

Proprietà del valore assoluto

$|x + y| \leq |x| + |y|$: il valore assoluto della somma di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri. Si ha l'uguaglianza solo quando i due numeri reali hanno lo stesso segno, oppure quando almeno uno dei due numeri è nullo.

$|x - y| \leq |x| + |y|$: il valore assoluto della differenza di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri.

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$: il valore assoluto del prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei valori assoluti dei due numeri.

$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$: il valore assoluto del rapporto di due numeri è uguale al rapporto dei valori assoluti dei due numeri.

In generale, se l'argomento del valore assoluto è una funzione $f(x)$ si ha:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{, se} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{, se} \quad f(x) < 0 \end{cases}.$$

Esempio 4.2: *Valore assoluto di numeri reali*

- $|5+3| = |5| + |3|$ *in entrambi i casi si ottiene* 8
- $|5+(-3)| = 2$ *mentre* $|5| + |-3| = 8$, *pertanto* $|5+(-3)| < |5| + |-3|$.

Nelle espressioni contenenti valori assoluti di argomento letterale si deve cercare di eliminare il valore assoluto.

Esempio 4.3 (V): *lore assoluto di argomento letterale*

- $|x^2| = x^2$ *infatti* x^2 *è una quantità sempre non negativa;*
- $|a^2+1| = a^2+1$ *infatti* a^2 *è sempre positivo, aumentato di* 1 *sarà sempre* > 0
- $|x-1| = \begin{cases} x-1, \textit{ se } x \geq 1 \\ -x+1, \textit{ se } x < 1 \end{cases}$ *una funzione di questo tipo si dice* definita per casi*;*
- $f(a) = |a+1| - 3a + 1$ *acquista due significati a seconda che l'argomento del valore assoluto sia non negativo o negativo. La sua espressione algebrica è:*

$$f(a) = |a+1| - 3a + 1 = \begin{cases} a+1-3a+1 = -2a+2, \textit{ se } a+1 \geq 0 \Rightarrow a \geq -1 \\ -(a+1)-3a+1 = -4a, \textit{ se } a+1 < 0 \Rightarrow a < -1 \end{cases}.$$

4.4 Esercizi

Esercizi dei singoli paragrafi

1.1 - Dai numeri naturali ai numeri irrazionali

4.1. *Dimostra, con un ragionamento analogo a quello fatto per $\sqrt{2}$, che $\sqrt{3}$ non è razionale.*

4.2. *Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso. Esempio:* $\sqrt{3}$: $A = \{1; 1{,}7; 1{,}73; 1{,}732; 1{,}7320; 1{,}73205\}$, $B = \{2; 1{,}8; 1{,}74; 1{,}733; 1{,}7321; 1{,}73206\}$

a) $\sqrt{5}$: $A = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$, $B = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$

b) $\frac{6}{7}$: $A = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$, $B = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$

c) $\frac{1}{7}$: $A = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$, $B = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$

1.2 - I numeri reali

4.3. *Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di almeno sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso:*

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *b)* $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

4.4. *Determina per ciascuno dei seguenti numeri irrazionali i numeri interi tra i quali è compreso. Esempio:* $5 < \sqrt{30} < 6$

a) $\sqrt{50}$ *b)* $\sqrt{47}$ *c)* $\sqrt{91}$ *d)* $\sqrt{73}$ *e)* $\sqrt{107}$ *f)* $\sqrt{119}$ *g)* $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ *h)* $2\sqrt{7}$ *i)* $2+\sqrt{7}$ *j)* $\sqrt{20}-\sqrt{10}$ *k)* $\sqrt{\frac{7}{10}}$ *l)* $7+\sqrt{\frac{1}{2}}$

4.5. *Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali:*

a) $\sqrt{2}$, 1, $\frac{2}{3}$, $2{,}0\overline{13}$, $\sqrt{5}$, $\frac{3}{2}$ $0{,}75$

b) π, $\sqrt{3}$, $\frac{11}{5}$, $0{,}\overline{9}$, $\sqrt{10}$, $3{,}1\overline{4}$, $\sqrt[3]{25}$

4.6. *Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, suddividilo nei seguenti sottoinsiemi: l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, l'insieme $\mathbb{J}$ dei numeri irrazionali. Disponi in maniera opportuna i seguenti numeri:* $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, π, $0{,}\overline{3}$, $3{,}14$, $\frac{3}{2}$, -2

4.7. *Indica il valore di verità delle seguenti affermazioni:*

a) un numero decimale finito è sempre un numero razionale;
b) un numero decimale illimitato è sempre un numero irrazionale;
c) un numero decimale periodico è un numero irrazionale;
d) la somma algebrica di due numeri razionali è sempre un numero razionale;
e) la somma algebrica di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale;
f) il prodotto di due numeri razionali è sempre un numero razionale;
g) il prodotto di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale.

1.3 - Richiami sul valore assoluto

4.8. *Calcola il valore assoluto dei seguenti numeri:*

a) $|-5|$
b) $|+2|$
c) $|-1|$
d) $|0|$
e) $|-10|$
f) $|3-5(2)|$
g) $|-3+5|$
h) $|(-1)^3|$
i) $|-1-2-3|$

4.9. *Dati due numeri reali x ed y entrambi non nulli e di segno opposto, verifica le seguenti relazioni con gli esempi numerici riportati sotto. Quali delle relazioni sono vere in alcuni casi e false in altri, quali sono sempre vere, quali sono sempre false?*

Relazione	$x=-3, y=5$	$x=-2, y=2$	$x=-10, y=1$	$x=1, y=-5$
$\lvert x\rvert < \lvert y\rvert$	V F	V F	V F	V F
$\lvert x\rvert = \lvert y\rvert$	V F	V F	V F	V F
$\lvert x\rvert < y$	V F	V F	V F	V F
$\lvert x+y\rvert < \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	V F	V F	V F	V F
$\lvert x-y\rvert = \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$	V F	V F	V F	V F
$\lvert \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \rvert = \lvert x-y\rvert$	V F	V F	V F	V F

4.10. *Elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni sostituendole con una funzione definita per casi:*

a) $f(x) = |x+1|$
b) $f(x) = |x-1|$
c) $f(x) = |x^2+1|$
d) $f(x) = |(x+1)^2|$
e) $f(x) = |x^2-1|$
f) $f(x) = |x^3-1|$
g) $f(x) = |x^2-6x+8|$
h) $f(x) = |x^2+5x+4|$

4.11. *Elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni sostituendole con una funzione definita per casi:*

a) $f(x) = \dfrac{|x+1|}{|x+2|}$
b) $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$
c) $f(x) = |x+1| + |x-2|$
d) $f(x) = |x+2| + |x-2|$
e) $f(x) = |x-2| + |x-3|$
f) $f(x) = |x+1| \cdot |x+2|$
g) $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{4}\right| + \left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|$
h) $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{x+2}\right| + \left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|$

5 Dai Naturali agli Iperreali

5.1 Dai numeri naturali ai numeri complessi

Riprendiamo i diversi insiemi numerici che abbiamo imparato a conoscerete mettendo in evidenza il loro ruolo come modelli per risolvere alcune classi di problemi e le loro caratteristiche.

I numeri naturali $\mathbb{N}$

I primi numeri che abbiamo incontrato sono i numeri *naturali*. Sono quelli che permettono di contare oggetti. Se sul banco ho un quaderno, una penna e un libro posso dire che ci sono 3 oggetti. Si può capire come il numero Zero abbia avuto difficoltà a farsi accettare come numero: serve per contare un gruppo di oggetti dove non c'è niente da contare. Ma ora abbiamo capito che è molto comodo considerare lo zero come un numero. L'insieme dei numeri *naturali* viene indicato con $\mathbb{N}$.

Nei numeri naturali sono definite l'addizione, la moltiplicazione che sono sempre possibili. In queste due *strutture* $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}, \times)$ valgono le proprietà: associativa, commutativa e l'esistenza dell'elemento neutro.

Nei numeri naturali è definita anche la *potenza* ma questa operazione non può essere eseguita quando sia la base sia l'esponente sono uguali a zero.

Oltre a queste, sono definite anche le loro operazioni inverse: la sottrazione, la divisione e la radice, ma queste non si possono eseguire con ogni coppia di numeri.

D'altra parte se su un tavolo ho 5 oggetti posso toglierne 3 e ne restano 2:

$$5 - 3 = 2$$

Ma se sul tavolo ho 3 oggetti non ha senso cercare di toglierne 5!

I numeri interi $\mathbb{Z}$

I numeri possono però essere utilizzati anche come modelli di altre situazioni. Supponiamo di avere la sequenza di oggetti e di voler riferirmi ad ognuno con un numero che equivale al suo indirizzo o indice. In certi casi potrei cercare il primo elemento della sequenza e chiamarlo zero, quello che viene dopo lo chiamo uno e così via. Ma se ci trovassimo a lavorare principalmente con gli elementi compresi tra il 273 elemento e il 310 elemento, questo modo di fare sarebbe piuttosto scomodo. Molto più semplice è mettersi d'accordo di chiamare zero il 273 elemento e partire da lì a contarli. In questo caso, i numeri che dovremo usare saranno quelli compresi tra 0 e 37. Ci sono inoltre delle situazioni in cui è difficile, o impossibile, determinare un *primo* elemento della sequenza e anche in questo caso ci si può mettere d'accordo di assegnare ad un preciso elemento della sequenza il valore zero.

È chiaro che lo *zero* non sarà il *primo* elemento della sequenza, ma un valore all'interno della sequenza. È possibile muoversi sia sopra lo zero, sia sotto lo zero. Per non inventare dei nomi completamente nuovi per questi nuovi numeri, sono stati aggiunti semplicemente due segni: “$+$” per i numeri dopo lo zero e “$-$” per i numeri prima dello zero. Questi nuovi numeri, ottenuti aggiungendo il segno ai numeri naturali, sono chiamati numeri *interi* e l’insieme di questi numeri viene indicato con $\mathbb{Z}$. L’insieme dei numeri interi non ha un elemento minimo.

Per le esigenze pratiche, i numeri interi non sono strettamente necessari, è sempre possibile dare un numero naturale e indicare se intendiamo “prima o dopo”, “sopra o sotto”. Lo facciamo spesso, ad esempio: 300 anni prima dell’era volgare, o: 1200m sotto il livello del mare, oppure: 4°C sotto zero. Ma usare questi nuovi numeri ci semplifica la vita in molte situazioni, soprattutto quando dobbiamo operare con calcoli.

Nei numeri interi, l’addizione può essere vista come muoversi nel verso di crescita dei numeri e la sottrazione come muoversi nel verso della decrescita dei numeri. Dato che lo zero è un elemento convenzionale non c’è nessun problema a togliere 5 da 3 semplicemente si arriverà nella posizione 2 prima dello zero detta -2.

In questo insieme di numeri è sempre definita anche la sottrazione, anzi la sottrazione diventa semplicemente un caso particolare di addizione.

I numeri interi permettono di risolvere sempre equazioni del tipo:

$$x + a = 0$$

I numeri interi formano un’estensione dei naturali; mantengono quasi tutte le proprietà dei naturali (non la proprietà di avere un minimo) ma in questo insieme, la sottrazione è sempre definita. Il sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ formato dallo zero e da tutti i numeri positivi si comporta esattamente come l’insieme dei numeri Naturali. Diremo che questo sottoinsieme è isomorfo all’insieme $\mathbb{N}$ e questo ci permette di usare indifferentemente $+7$ o 7 senza dover precisare che $+7$ è un elemento di $\mathbb{Z}$ mentre 7 è un elemento di $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Z},\ +$ verifica le proprietà associativa, l’esistenza dell’elemento neutro e l’esistenza degli elementi inversi diremo quindi che gli interi con l’operazione di addizione formano un *gruppo* e valendo anche la proprietà commutativa il gruppo si dice commutativo o abeliano.

$\mathbb{Z},\ \times$ verifica la proprietà associativa, diremo quindi che gli interi con l’operazione di moltiplicazione formano un *semigruppo*.

Inoltre, dato che vale la proprietà distributiva, diremo che $\mathbb{Z},\ +,\ \times$ è un *anello*. Dato che in $\mathbb{Z}$ esiste l’elemento neutro anche rispetto alla moltiplicazione, diremo che l’anello è dotato di *unità*.

Anche questi numeri però non riescono a realizzare un modello in certe situazioni che invece, nella pratica, si possono risolvere facilmente con un po’ di creatività. Ad esempio come possiamo dividere 3 uova, in parti uguali, tra 4 persone?

I numeri razionali $\mathbb{Q}$

Con le tre uova faccio una frittata che divido facilmente in 4 parti uguali. Possiamo costruire dei numeri che permettano di calcolare il quoziente esatto di due numeri interi anche quando la divisione tra i due dà un resto diverso da zero. Questi nuovi numeri sono chiamati numeri *razionali* e l’insieme di questi numeri viene indicato con $\mathbb{Q}$.

Mentre nei naturali e negli interi ad ogni numero corrisponde un *nome* ben preciso, nei razionali lo stesso numero può essere indicato con molti nomi diversi. Ad esempio il numero che si ottiene dividendo 1 in due parti uguali può essere indicato in uno di questi modi:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \cdots = \frac{45}{90} = \frac{132}{264} = \cdots = 0{,}5$$

Ogni numero razionale può essere rappresentato con un numero con la virgola limitato o periodico, o con una qualunque delle infinite frazioni equivalenti.

Con i numeri razionali si può sempre calcolare il risultato della divisione tra due numeri (naturali, interi o razionali) tranne il caso particolare in cui il divisore sia uguale a zero. In questo caso la divisione non può essere eseguita.

I numeri razionali ci permettono di risolvere tutti i problemi pratici che possiamo incontrare, dal calcolare il resto della spesa al far atterrare una sonda su Marte. Anzi i nostri computer, che sono in grado di fare cose meravigliose, usano un sottoinsieme estremamente limitato di numeri razionali.

Anche i numeri razionali non sono strettamente necessari per descrivere e modellizzare la realtà, basta usare in ogni occasione una appropriata unità di misura: invece di $1{,}273\,km$ possiamo scrivere: $1273\,m$; invece che $\frac{5}{6}$ di torta possiamo dividere la torta in 6 fette e considerarne 5.

L'uso dei numeri razionali comunque ci semplifica notevolmente la vita. Nei numeri razionali è (quasi) sempre definita la divisione, anzi la divisione viene trasformata nella moltiplicazione tra il dividendo e il reciproco del divisore.

I numeri razionali permettono di risolvere sempre equazioni del tipo:

$$ax + b = 0 \quad \text{con} \quad a \neq 0.$$

I razionali formano un'estesione dei numeri interi, mantengono quasi tutte le proprietà degli interi, ma in questi numeri la divisione per un numero diverso da zero, è sempre definita.

Anche tra i razionali si può trovare un sottoinsieme isomorfo all'insieme degli interi, cioè che si comporta come l'insieme degli interi: è il sottoinsieme dei numeri che, scritti sotto forma di frazioni hanno come numeratore un multiplo del denominatore o che, ridotte ai minimi termini, hanno per denominatore uno. Questo fatto ci permette di poter scrivere: $-\frac{7}{1} = -7$ senza dover precisare che il primo numero appartiene a $\mathbb{Q}$ e il secondo a $\mathbb{Z}$.

I razionali hanno una caratteristica particolare che non avevano né i naturali né gli interi: formano un insieme *denso* cioè tra due numeri razionali, per quanto vicini, se ne può trovare sempre almeno un altro.

Dato che in $\mathbb{Q}$, $+$, $\times$ anche la seconda operazione ha l'inverso di ogni numero diverso da zero, i razionali, con le operazioni addizione e moltiplicazione e queste operazioni sono commutative, forma un *campo*.

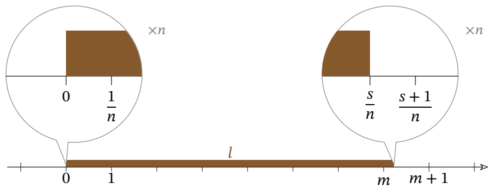
Ma ci sono ancora situazioni in cui i numeri razionali non permettono di risolvere, in modo esatto, problemi relativamente semplici da risolvere praticamente. Ad esempio è stato dimostrato (già qualche millennio fa) che se il lato di un quadrato è un numero razionale allora la sua diagonale non lo è: nessun razionale elevato alla seconda dà 2.

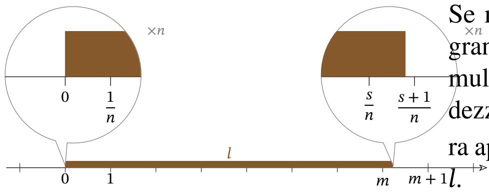
Il problema della misura

Misurare significa ottenere il rapporto tra la grandezza da misurare e un'unità di misura. Per misurare contiamo quante volte l'unità di misura è contenuta nella grandezza da misurare. Se l'unità di misura non è contenuta un numero esatto di volte, si può cercare un opportuno sottomultiplo dell'unità di misura in modo che questo sia contenuto un numero esatto di volte.

In pratica, quando si misura una grandezza, l, si divide l'unità di misura in un certo numero naturale n di parti equivalenti, il massimo che la risoluzione dello strumento permette, e poi si contano quante di queste parti (diciamo m) servono per ottenere una grandezza minore o uguale a quella da misurare mentre $m+1$ di queste parti daranno una grandezza maggiore di quella che si deve misurare.

Se si riesce a trovare un numero s tale che *esse ennesimi* dell'unità di misura siano equivalenti alla grandezza, allora prendiamo $\frac{s}{n}$ come misura della grandezza l.

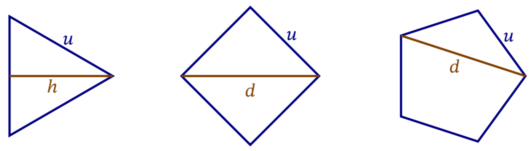




Se non lo troviamo, consideriamo il più grande valore s che moltiplicato per il sottomultiplo dell'unità di misura dia una grandezza minore a l e prendiamo $\frac{s}{n}$ come misura approssimata per difetto della grandezza l.

In tal modo si otterrà un numero razionale (m/n) che sarà, in pratica, la migliore misura razionale approssimata per difetto della grandezza che si vuole misurare, e l'eventuale errore che si commette, minore di un n-esimo dell'unità di misura, sarà qualcosa di non apprezzabile dallo strumento usato.

Ma, fissata un'unità di misura, molte grandezze non possono essere misurate *esattamente* con i numeri razionali. Ad esempio in questi poligoni regolari, i segmenti h e d sono grandezze incommensurabili con il lato.

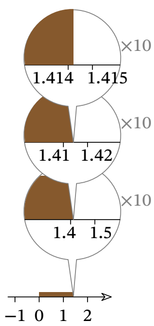


Approssimazioni di grandezze non commensurabili Le grandezze incommensurabili con l'unità di misura non si possono misurare esattamente contando i sottomultipli dell'unità di misura, ma di esse possiamo considerare tutte le approssimazioni razionali per difetto e per eccesso (e ognuna di queste si ottiene contando).

Inoltre, comunque scelto un numero naturale $n \neq 0$, si potranno avere approssimazioni razionali una per eccesso e una per difetto che differiscono tra loro meno di un n-esimo dell'unità di misura.

Si potrebbe pensare che le due totalità delle approssimazioni razionali della misura quelle per difetto e quelle per eccesso costituiscano una indicazione della misura della grandezza data.

Ad esempio, possiamo approssimare la misura della diagonale d di un quadrato di lato 1, dividendo l'unità di misura in un sempre maggior numero di parti sempre più piccole.



Valore per difetto di $\sqrt{2}$	Valore per eccesso di $\sqrt{2}$
1	2
1,4	1,5
1,41	1,42
1,414	1,415
1,4142	1,4143
...	...

Osservazione 5.1 (P): *r evitare di distinguere casi differenti, conveniamo che il razionale che è misura esatta di una grandezza A non sia un'approssimazione della stessa, ma che pure tale A sia approssimabile mediante razionali.*

1. *Ogni grandezza ha insiemi non vuoti di approssimazioni razionali: per difetto D_A e per eccesso E_A.*
2. *Le approssimazioni per difetto sono minori delle approssimazione per eccesso.*
3. *Un numero minore di un'approssimazione per difetto appartiene a D_A e un numero maggiore di un'approssimazione per eccesso appartiene a E_A.*
4. *Le approssimazioni per difetto non hanno massimo e quelle per eccesso non hanno minimo.*
5. *Ogni razionale, con l'eventuale esclusione della misura esatta della grandezza A, o è un'approssimazione per eccesso o è un'approssimazione per difetto.*

Da queste caratteristiche segue che per ogni numero naturale, diverso da zero, n ci sono un razionale q_1 dell'insieme D_A e un razionale q_2 dell'insieme E_A tali che $q_2 - q_1 < 1/n$.

Sezioni sui razionali

Chiamiamo *sezione dei razionali* una coppia di insiemi di razionali che abbia le caratteristiche delle coppie di insiemi costituiti dalle approssimazioni razionali per eccesso e da quelle per difetto di una grandezza.

Mentre le classi di approssimazioni di grandezze costituiscono un insieme numerabile, le sezioni dei razionali sono una quantità più che numerabile (tante quanti i sottoinsiemi dei numeri naturali).

Per *elementi separatori di una sezione dei razionali* si intendono gli enti maggiori di ogni numero razionale della classe inferiore e minori di ogni elemento della classe superiore.

Partendo dalle classi di approssimazione siamo arrivati al concetto simile, ma più generale di sezioni sui razionali. Ma cosa c'è tra le due classi della sezione?

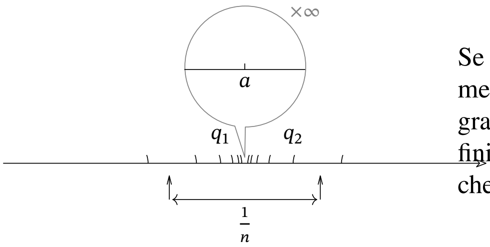
In certi casi è un numero razionale. Ad esempio se in una classe ci sono tutti i razionali minori di $\frac{3}{4}$ e nell'altra tutti quelli maggiori di $\frac{3}{4}$, questo numero razionale sarà un elemento separatore per tale sezione. Ma è l'unico?

Ma se l'elemento separatore non può essere un numero razionale come nel caso visto sopra dove abbiamo messo in una classe tutti i numeri minori di $\sqrt{2}$ e nell'altra tutti i numeri maggiori di $\sqrt{2}$ cosa viene individuato dalla sezione?

Dobbiamo inventarci qualcosa di nuovo e possiamo scegliere:

1. un solo elemento separatore per sezione.
2. più elementi separatori per ogni sezione.

Numeri reali $\mathbb{R}$



Se decidiamo che ci sia un solo nuovo numero per ciascuna sezione, otteniamo una grandissima quantità di numeri che sono infinitamente di più rispetto a tutti i problemi che possiamo pensare di esprimere.

Questi nuovi numeri sono stati chiamati numeri *reali* e l'insieme dei numeri reali viene indicato con il simbolo $\mathbb{R}$.

Sono numeri molto interessanti che permettono di risolvere in modo semplice una grande quantità di problemi.

Ma non riescono a cogliere bene situazioni dinamiche riuscendo a rappresentare solo la posizione di un punto ma non la pendenza nel punto o la velocità istantanea nel passare per un punto.

I numeri reali formano un insieme *ordinato*, *denso* ma anche *completo* cioè il numero individuato da una qualunque sezione sui razionali è un numero reale. Questo permette di far corrispondere ad ogni lunghezza di un segmento un numero *reale* e, viceversa, ad ogni numero *reale* una lunghezza di un segmento. L'insieme dei Reali contiene un sottoinsieme isomorfo ai numeri razionali.

L'insieme dei numeri reali permette di risolvere tutti i problemi che possiamo incontrare?

Per fortuna no!

Ci sono tipi di problemi che non possono essere risolti con i numeri reali. Ad esempio calcolare la radice quadrata di numeri negativi. All'apparenza questo è un problema assurdo: calcolare la radice quadrata di un numero equivale a trovare la lunghezza del lato di un quadrato di cui si conosce l'area. Ora, trovare un quadrato con area piccola si può fare, magari anche con area nulla, impegnandosi un po', ma trovare un quadrato con area negativa è proprio impossibile. Ma come abbiamo visto per i naturali ci possono essere fenomeni nei quali hanno senso operazioni che in altri sistemi sono insensate.

Prima di procedere con i prossimi insiemi numerici, però, riflettiamo su una particolare proprietà degli insiemi numerici visti finora.

Il postulato di Eudosso-Archimede

Proviamo a fare un *semplice* esperimento mentale. Prendo un foglio di carta e lo piego su se stesso un po' di volte. Che spessore raggiungo? Per semplificarci i calcoli supponiamo che il foglio di carta abbia lo spessore di $0{,}1mm = 0{,}0001m = 10^{-4}m$. Che spessore otterrò piegando il foglio su se stesso 64 volte?

Il calcolo è abbastanza semplice:

Numero piegature	spessore ottenuto	in metri
0	1	10^{-4}
1	2	$2 \cdot 10^{-4}$
2	4	$4 \cdot 10^{-4}$
3	8	$8 \cdot 10^{-4}$
4	16	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$
5	32	$3{,}2 \cdot 10^{-3}$
6	64	$6{,}4 \cdot 10^{-3}$
7	128	$1{,}28 \cdot 10^{-2}$
…	…	
n	2^n	…

Quindi piegando il foglio 64 volte ottengo uno spessore che è 2^{64} volte lo spessore di partenza quindi basta calcolare:

$$2^{64} = 18.446.744.073.709.551.616$$

che convertito in metri dà: $1.844.674.407.370.955m$ circa, che è uno spessore considerevole: dodicimila volte la distanza Terra-Sole: $149.600.000.000m$.

Si fa risalire ai matematici Eudosso e Archimede l'osservazione che per quanto piccolo si prenda un numero (ad esempio lo spessore di un foglio di carta), basta moltiplicarlo per un numero sufficientemente grande (2^{64}) per farlo diventare maggiore di qualsiasi numero prefissato (ad esempio la distanza Terra-Sole).

Postulato 5.1 (Eudosso-Archimede): *Dati due numeri positivi a, b si può sempre trovare un multiplo del più piccolo che sia maggiore del più grande:*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad | \quad na > b$$

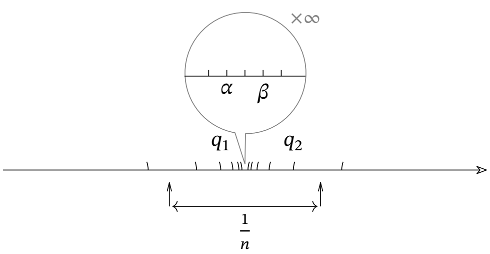
Vale anche il contrario: dati due numeri positivi a, b si può sempre dividere il più grande in modo da ottenere un risultato minore del più piccolo.

Ma questa osservazione di Eudosso-Archimede non è un teorema, non è un'osservazione dimostrata, è un *postulato*, un accordo fatto tra matematici, che può essere utile in moltissimi casi e che vale per tutti gli insiemi numerici visti finora. Ma cosa succede se ci accordiamo che *non* valga il postulato di Eudosso-Archimede?

Numeri iperreali $^*\mathbb{R}$

Riprendiamo l'idea che ha portato alla creazione dei numeri reali. Possiamo pensare che tra le classi di una sezione ci siano più elementi separatori, più numeri invece che uno solo.

La distanza tra questi dovrà essere minore di $\frac{1}{n}$ per ogni numero naturale positivo n.



Anche in questo caso gli elementi separatori che si inventano devono indicare delle quantità come fanno i numeri, sicché dovranno essere integrati, dall'invenzione di operazioni come l'addizione e la moltiplicazione con le solite proprietà e di una relazione d'ordine. Sono utili se formano un campo numerico ordinato.

Se ci sono almeno due elementi separatori, allora ce ne sono infiniti, perché anche la media di questi è ancora un numero compreso tra le classi che formano la sezione di razionali.

Questi numeri sono alla base dell'Analisi Non Standard.

La differenza tra due numeri diversi che sono elementi separatori di una stessa sezione dei razionali deve essere un numero diverso da zero, ma, in valore assoluto, minore di $\frac{1}{n}$ per ogni n dove n è un numero naturale diverso da zero:

$$\frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^0$$

dove con $\mathbb{N}^0$ intendiamo $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Quindi la differenza δ tra due di loro sarà tale che:

$$|\delta| < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^0$$

Chiamiamo *infinitesimo* un numero che in valore assoluto è minore di ogni numero razionale positivo.

Chiamiamo *monade* ogni insieme di numeri che hanno tra di loro una distanza infinitesima.

I numeri complessi $\mathbb{C}$

Riprendiamo il problema della radice di numeri negativi. Si può ampliare l'insieme dei numeri reali aggiungendo i numeri che sono le radici di tutti i numeri anche di quelli negativi. Per fare ciò si devono aggiungere molti altri numeri (infiniti) tutti questi nuovi numeri sono stati chiamati numeri *immaginari* che combinati con i numeri reali formano l'insieme dei numeri *complessi* insieme che viene indicato con $\mathbb{C}$. Anche per i numeri complessi tutti gli infiniti nuovi numeri si ottengono con la semplice aggiunta di un solo nuovo numero: *l'unità immaginaria* indicato con il simbolo i o con il simbolo j.

Definizione 5.1 (L): ***unità immaginaria*** *è quel numero che elevato alla seconda dà come risultato* -1*:*

$$i^2 = -1$$

Questi numeri hanno molte applicazioni tecniche, ma risultano anche affascinanti da un punto di vista estetico. La ripetizione di un paio di calcoli aritmetici tra numeri complessi produce il sorprendente insieme di Mandelbrot.

Ma dato che l'insieme dei reali oltre che essere un campo ordinato è anche completo, non è possibile aggiungere elementi ai reali senza perdere qualche proprietà dell'insieme numerico. Nel caso dei complessi l'insieme ottenuto non è ordinato.

È possibile prendere un sottoinsieme dei Complessi che sia isomorfo ai Reali.

Un numero complesso viene rappresentato dall'espressione:

$$a + ib$$

Dove a e b sono numeri reali. Se a e b sono numeri iperreali otterremo i numeri ipercomplessi $^*\mathbb{C}$.

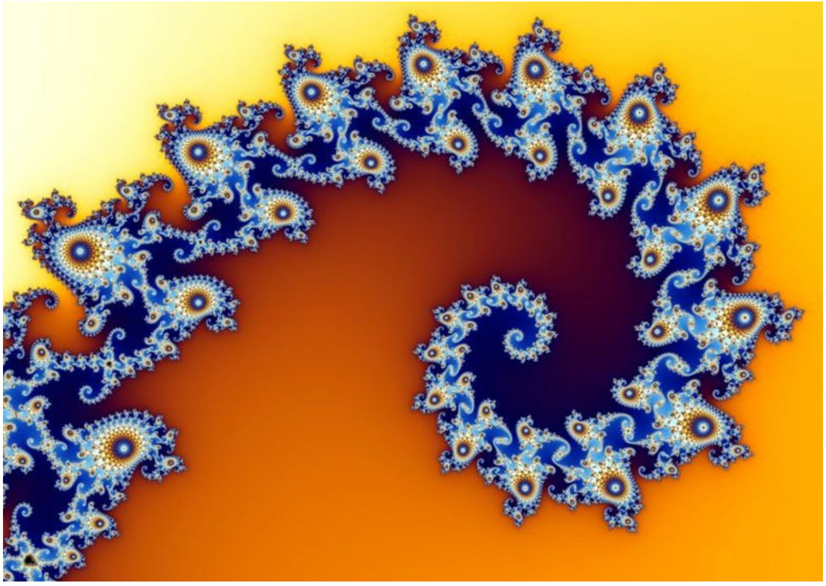


Figura 5.1: Porzione dell'insieme di Mandelbrot.

5.2 I numeri iperreali *ℝ

In questa sezione verranno presentate le caratteristiche dei numeri iperreali e li useremo per modellizzare e risolvere nuove classi di problemi. La conoscenza di questi nuovi numeri non è molto diffusa neanche fra i matematici, perché sono abituati da più di un secolo e mezzo a procedimenti più impegnativi e sofisticati. La ragione per la quale noi ne faremo uso è che questi nuovi numeri rendono certi concetti più semplici e immediati, senza per questo nuocere al rigore e alla precisione dei ragionamenti.

Il problema della velocità

Alla fine del 1600 Newton e Leibniz studiavano problemi legati alla meccanica. Una delle grandezze alla base della meccanica è la *velocità*. Ma cosa è la velocità? Se l'oggetto A percorre più strada dell'oggetto B possiamo dire che A è più veloce di B? No, non basta misurare lo spazio percorso da un oggetto per calcolare la sua velocità, bisogna anche misurare il tempo impiegato a percorrere quello spazio. Infatti sappiamo che:

$$\text{velocità} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato}}$$

La grandezza calcolata in questo modo è *la velocità media* dell'oggetto, ma in ogni istante del percorso l'oggetto ha una propria velocità. Come faccio a calcolarla? Potrei misurare lo spazio percorso in un tempo molto piccolo, in questo modo avrò una velocità media tenuta in un percorso molto breve…ma resta sempre una velocità media.

Per trovare la velocità istantanea dovrei dividere lo spazio percorso per un tempo (positivo) più piccolo di qualunque numero. L'unico numero reale più piccolo, in valore assoluto, di qualunque numero è lo zero, ma non posso usarlo per il calcolo della velocità, perché la divisione per zero non è definita: i numeri reali non ci permettono di calcolare una grandezza così semplice e evidente come la velocità di un oggetto in un dato istante.

Infinitesimi... e infiniti

Abbiamo visto che se una sezione di razionali individua *un solo nuovo numero*, otteniamo l'insieme dei numeri reali: $\mathbb{R}$, se invece individua *più numeri* otteniamo i numeri iperreali: $^*\mathbb{R}$.

Abbiamo anche visto che la distanza tra due di questi numeri è un numero inferiore a $\frac{1}{n}$ per ogni n naturale diverso da zero. Quindi la differenza tra due di questi numeri è un numero, in valore assoluto, più piccolo di

$$\frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^0$$

I numeri di questo tipo sono dei numeri nuovi, nessuno dei numeri che abbiamo conosciuto finora ha questa caratteristica.

Definizione 5.2: *Chiamiamo* infinitesimo *un numero che, in valore assoluto, è minore di $\frac{1}{n}$ per ogni n naturale diverso da zero:*

$$\varepsilon \text{ è un infinitesimo se } \quad |\varepsilon| < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^0$$

Osservazione 5.2: *In un insieme che contenga numeri infinitesimi non vale il postulato di Eudosso-Archimede infatti se $\varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^0$ moltiplicando entrambi i membri per n si ottiene: $n\varepsilon < 1$ qualunque sia il numero naturale n scelto.*
Quindi non si può ottenere un multiplo di un infinitesimo che sia maggiore di un numero grande quanto si vuole.

La prima conseguenza dell'introduzione di un infinitesimo è che allora ce ne sono infiniti! Infatti anche la metà di un infinitesimo è un infinitesimo e sono infinitesimi anche il suo doppio o un suo sottomultiplo o un suo multiplo.

Altra conseguenza dell'aggiunta di numeri infinitesimi è che, se si possono fare le normali operazioni con questi nuovi numeri, allora esiste anche un numero maggiore di qualunque numero reale:

$$\text{se} \quad \varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^0 \quad \text{allora} \quad \frac{1}{\varepsilon} > n \quad \forall n \in \mathbb{N}^0$$

Quindi se abbiamo dei numeri infinitesimi, e possiamo usarli nelle usuali 4 operazioni, allora avremo anche:

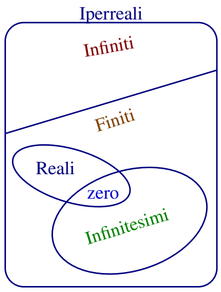
- un numero infinito di infinitesimi,
- un numero infinito di infiniti.

Chiamiamo *iperreali* i numeri che si ottengono combinando i reali con gli infinitesimi, e quindi anche con gli infiniti. Indichiamo l'insieme dei *numeri iperreali* con il simbolo: $^*\mathbb{R}$ ("erre star").

Tipi di iperreali

Abbiamo visto che l'introduzione di un elemento nuovo, così piccolo da poterlo pensare trascurabile, ha reso piuttosto affollato il nuovo insieme numerico. Cerchiamo di fare un po' di ordine. L'insieme degli Iperreali contiene diversi tipi di numeri li vediamo qui di seguito.

Infinitesimi: numeri che, in valore assoluto, sono minori di qualunque numero reale positivo.
Infiniti: numeri che, in valore assoluto, sono maggiori di qualunque numero reale.
Zero: l'unico numero reale infinitesimo.
Infinitesimi non nulli: numeri infinitesimi, escluso lo zero.
Finiti: numeri che non sono infiniti.
Finiti non infinitesimi: numeri che non sono né infiniti né infinitesimi.



Per semplificare la scrittura (e complicare la lettura) adotteremo delle sigle e delle convenzioni per indicare questi diversi tipi di numeri:

tipo	sigla	simboli
zero		0
infinitesimi	i	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$
infinitesimi non nulli	inn	
finiti non infinitesimi	fni	$a, b, c, d, \ldots$
finiti	f	$a, b, c, d, \ldots$
infiniti	I	$A, B, C, \ldots$
qualsiasi		$x, y, z, \ldots$

Esempio 5.1: *Individua il tipo delle seguenti espressioni:*

1. $\pi + \varepsilon$ 2. $4\varepsilon + \varepsilon \cdot \delta$ 3. $M - 7$ 4. $M + \dfrac{1}{\varepsilon}$

Vediamo i vari casi:

1. $\pi + \varepsilon$: *è un numero finito perché* π *è un numero finito* $(3{,}141592653589793\ldots)$ *con infinite cifre decimali, ma* ε *è più piccolo della più piccola cifra di* π *che possiamo pensare quindi aggiungere un infinitesimo ad un numero reale non cambia il numero reale che rimane un numero finito, in questo caso non infinitesimo.*

2. $4\varepsilon + \varepsilon \cdot \delta$: *qui abbiamo la somma di due quantità, la prima è formata da 4 infinitesimi, ma per come abbiamo definito l'infinitesimo, anche 4 infinitesimi sono un numero infinitesimo; la seconda è formata dal prodotto di un infinitesimo per un altro infinitesimo che indica quindi un infinitesimo di un infinitesimo che è un infinitesimo ancora più infinitesimo di ciascuno dei due. La loro somma quindi è un infinitesimo con lo stesso segno di* ε.

3. $M - 7$: *possiamo distinguere due casi:*

   - *se* M *è un infinito negativo, allora* $M - 7$ *sarà un numero in valore assoluto ancora più grande,*
   - *se* M *è un infinito positivo,* $M - 7$ *sarà numero più piccolo di* M *ma che non può essere un numero finito. Infatti, supponiamo che* $M - 7$ *sia un numero finito, chiamiamolo* x*; ma se* x *è finito allora anche* $x + 7$ *è finito e questo avrebbe come conseguenza che anche* M *sia finito contraddicendo le nostre convenzioni.*

4. $M + \dfrac{1}{\varepsilon}$: *in questo caso dobbiamo fare una distinzione:*

   - *se* M *e* ε *hanno lo stesso segno il calcolo precedente equivale a sommare due infiniti entrambi positivi (o negativi) e darà come risultato un infinito positivo (o negativo).*
   - *se* M *e* ε *hanno segni diversi bisogna avere più informazioni per poter stabilire il tipo del risultato.*

Numeri infinitamente vicini

Nei numeri reali, due numeri o sono uguali o sono diversi (ovviamente). Nel primo caso, la differenza tra i due numeri è zero, nel secondo, la differenza è un numero reale diverso da zero.

Negli iperreali, se due numeri sono diversi, la loro differenza può essere un numero infinito, un numero finito non infinitesimo o un numero infinitesimo.

Esempio 5.2: *Calcola la distanza tra* $a = 7 + \varepsilon$ *e* $b = 10 - 5\varepsilon$*:*
$|b - a| = |(10 + \varepsilon) - (7 - 5\varepsilon)| = |10 + \varepsilon - 7 + 5\varepsilon| = |10 - 7 + \varepsilon + 5\varepsilon| = |3 + 6\varepsilon|$
La distanza tra a *e* b *è uguale a 3 più un infinitesimo (*fni*).*

Esempio 5.3: *Calcola la distanza tra* $a = 5 + \varepsilon$ *e* $b = 5 + \delta$*:*
$|b - a| = |(5 + \delta) - (5 + \varepsilon)| = |5 + \delta - 5 - \varepsilon| = |5 - 5 + \delta - \varepsilon| = |0 + \delta - \varepsilon| = |\gamma|$
In questo caso la distanza tra a *e* b *è un infinitesimo (*i*).*

Negli iperreali la differenza tra due numeri può essere:

- un infinito;
- un finito non infinitesimo;
- un infinitesimo (zero se i due numeri sono uguali).

Quando la differenza di due numeri è un infinitesimo, diciamo che i due numeri sono *infinitamente vicini*.

Definizione 5.3: *Due numeri si dicono* ***infinitamente vicini*** *(simbolo: $\approx$) se la loro differenza è un infinitesimo:*

$$x \approx y \;\Leftrightarrow\; x - y = \varepsilon$$

Tutti gli infinitesimi sono infinitamente vicini tra di loro e sono infinitamente vicini a zero.

Due numeri infinitamente vicini, sono diversi tra di loro, ma la loro differenza è minore di qualunque numero reale positivo.

Dato un qualunque numero iperreale, possiamo considerare l'insieme di tutti i numeri infinitamente vicini a questo.

Definizione 5.4: *Si chiama* monade *del numero x l'insieme formato da tutti i numeri iperreali infinitamente vicini a x.*

Due monadi diverse non hanno elementi in comune.

Una monade può contenere al massimo un numero reale, due numeri reali diversi appartengono a monadi diverse.

Iperreali finiti e parte standard

Tra i vari tipi di iperreali, hanno un ruolo particolare gli iperreali finiti perché sono quelli che assomigliano di più ai numeri che già conosciamo e possono essere facilmente tradotti in numeri reali e approssimati con numeri razionali.

Definizione 5.5: *Un numero iperreale si dice* ***finito*** *se è compreso tra due numeri reali:*

$$\text{se } x \in {}^{*}\mathbb{R} \;\text{ e }\; a < x < b \;\text{ con }\; a, b \in \mathbb{R} \quad \text{allora } x \text{ è finito.}$$

Esempio 5.4: *Individua quali dei seguenti numeri sono finiti (considerando, per semplicità ε positivo):*

1. $8 + 5\varepsilon$ *2.* $(8 + 5\varepsilon)^2$ *3.* $8 + \dfrac{5}{\varepsilon}$

Vediamo i tre casi:

1. $(8 + 5\varepsilon)$ *è un numero finito perché:*
$$(8 - 1) < (8 + 5\varepsilon) < (8 + 1)$$
2. *Eseguiamo il quadrato:* $(8 + 5\varepsilon)^2 = 64 + 80\varepsilon + 25\varepsilon^2$ *ma:* 80ε *è sicuramente un infinitesimo e anche* $25\varepsilon^2$ *lo è e sarà un infinitesimo anche la loro somma, chiamiamo* δ *questa somma quindi:* $(8 + 5\varepsilon)^2 = 64 + \delta$ *e:*
$$(64 - 1) < (64 + \delta) < (64 + 1)$$
3. *Nell'ultimo caso possiamo osservare che, essendo* ε *in valore assoluto minore di qualunque numero reale,* $\dfrac{5}{\varepsilon}$ *è un numero, in valore assoluto, maggiore di qualunque numero reale e la somma di 8 più un numero maggiore di qualunque altro, non può essere minore di un determinato numero reale, perciò* $8 + \dfrac{5}{\varepsilon}$ *è un numero infinito.*

Ogni numero *finito* può essere visto come un numero *reale* più un *infinitesimo*.

Se x è finito allora $x = a + \varepsilon$ dove:

- x è un numero iperreale finito;
- a è un numero reale;
- ε è un infinitesimo (anche zero).

Se $x = a + \varepsilon$ allora potremmo dire che x è infinitamente vicino ad a infatti la differenza tra i due dà un infinitesimo:

$$x = a + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x - a = a + \varepsilon - a \;\Leftrightarrow\; x - a = \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x \approx a$$

Un numero iperreale finito non può essere infinitamente vicino a due numeri reali diversi (perché?). Quindi possiamo creare una funzione che ha come insieme di definizione i numeri iperreali finiti e come insieme immagine i numeri reali. Chiameremo "parte standard" la funzione che associa ad ogni iperreale finito il numero reale a lui infinitamente vicino.

Definizione 5.6: *Si dice che* a *è la* ***parte standard*** *di* x*, e si scrive:* $\operatorname{st}(x) = a$*, se* a *è un numero reale infinitamente vicino a* x*:*

$$\operatorname{st}(x) = a \;\Leftrightarrow\; a \in \mathbb{R} \text{ e } x \approx a$$

Osservazione 5.3:

- *La parte standard di un reale è il reale stesso.*
- *La parte standard di un infinitesimo è zero infatti:* $\varepsilon = 0 + \varepsilon$.
- *Un numero iperreale infinito non ha parte standard poiché non esiste nessun numero reale infinitamente vicino a un infinito.*
- *La* parte standard *è una funzione che ha per dominio i numeri iperreali, per insieme di definizione gli iperreali finiti e per codominio, e insieme immagine, i numeri reali.*

La Parte Standard presenta alcune proprietà che possono essere facilmente dimostrate. Nel seguito $x,\ y$ rappresentano iperreali finiti (poiché gli infiniti non hanno parte standard):

1. $\operatorname{st}(-x) = -\operatorname{st}(x)$
2. $\operatorname{st}(x \pm y) = \operatorname{st}(x) \pm \operatorname{st}(y)$
3. $\operatorname{st}(xy) = \operatorname{st}(x) \cdot \operatorname{st}(y)$
4. *se* $\operatorname{st}(y) \neq 0$ *allora* $\operatorname{st}\left(\frac{x}{y}\right) = \dfrac{\operatorname{st}(x)}{\operatorname{st}(y)}$
5. $\operatorname{st}\left(\sqrt[n]{x}\right) = \sqrt[n]{\operatorname{st}(x)}$
6. *se* $x < y$ *allora* $\operatorname{st}(x) \leqslant \operatorname{st}(y)$.

Ne dimostriamo alcune, chiamando $a = \operatorname{st}(x)$ e $b = \operatorname{st}(y)$.

1. $\operatorname{st}(-x) = \operatorname{st}(-a - \varepsilon) = -a = -(a) = -(\operatorname{st}(x))$
   Se a è un numero infinitamente vicino a x, allora $-a$ sarà infinitamente vicino a $-x$ e dato che $a = \operatorname{st}(x)$ si ottiene la tesi.

2. $\operatorname{st}(x \pm y) = \operatorname{st}(a + \varepsilon \pm (b + \delta)) = \operatorname{st}(a \pm b + \varepsilon \pm \delta) = a \pm b = \operatorname{st}(x) \pm \operatorname{st}(y)$
   Se a e b sono la parte standard di x e y, al posto di x e y posso scrivere $a+\varepsilon$ e $b+\delta$, ma nella somma algebrica valgono le proprietà commutativa e associativa quindi otteniamo che $x \pm y$ è uguale al numero reale $a \pm b$ più un infinitesimo e la sua parte standard è proprio questo numero reale che può anche essere scritto: $\operatorname{st}(x) \pm \operatorname{st}(y)$.

3. $\operatorname{st}(xy) = \operatorname{st}((a + \varepsilon)(b + \delta)) = \operatorname{st}(ab + a\delta + b\varepsilon + \varepsilon\delta) = ab = \operatorname{st}(x) \cdot \operatorname{st}(y)$
   Infatti …

4. Perché valga la tesi, $\frac{x}{y} \approx \frac{a}{b}$, la differenza tra le due frazioni deve essere un infinitesimo:
   $$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+\varepsilon}{b+\delta} - \frac{a}{b} = \frac{(a+\varepsilon)b - a(b+\delta)}{(b+\delta)b} = \frac{ab + b\varepsilon - ab - a\delta}{b^2 + b\delta} = \frac{b\varepsilon - a\delta}{b^2 + b\delta}$$
   quindi …(continua tu, bastano poche considerazioni senza ulteriori calcoli).

Retta iperreale e strumenti ottici

Abbiamo accettato facilmente l'idea che ad ogni numero reale corrisponda un punto della retta e ad ogni punto della retta corrisponda un numero reale. Questa affermazione non è un teorema dimostrato, è un postulato. Fa parte del modello di numeri usato, questa idea è caratteristica dei numeri reali.

Ma dato che ora stiamo cambiando modello, cambiamo anche questo postulato. Lo riformuliamo così:

Postulato 5.2: *Ad ogni numero iperreale corrisponde un punto della retta (iperreale) e ad ogni punto della retta (iperreale) corrisponde un numero iperreale.*

Oppure:

Postulato 5.3 (Retta iperreale): *C'è una corrispondenza biunivoca tra i numeri iperreali e i punti della retta.*

Abbiamo già una certa abitudine a rappresentare numeri reali sulla retta, per rappresentare i numeri iperreali dobbiamo procurarci degli strumenti particolari: *microscopi*, *telescopi*, *grandangoli non standard*.

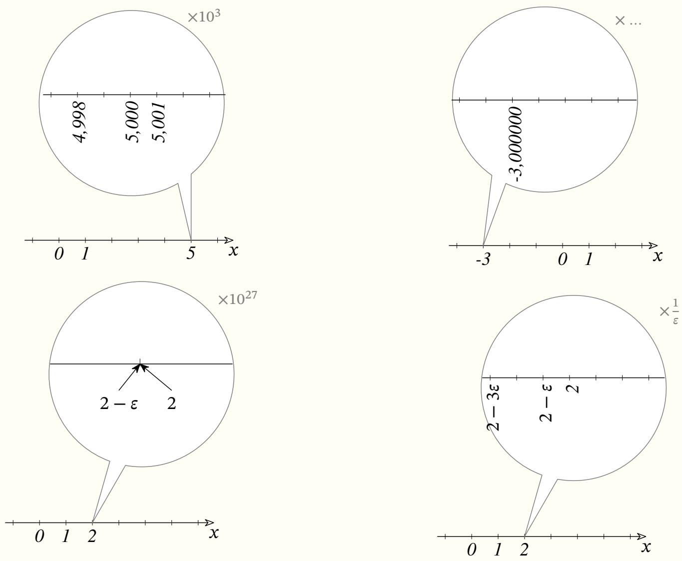
Diamo una sbirciata al loro manuale di istruzioni.

Microscopi

Il microscopio permette di ingrandire una porzione di retta. Per esempio un microscopio permette di visualizzare i seguenti numeri:

Esempio 5.5:

- $+4{,}998$
- $-3{,}000002$
- $2 - 3\varepsilon$
- $-4 + 2\delta$



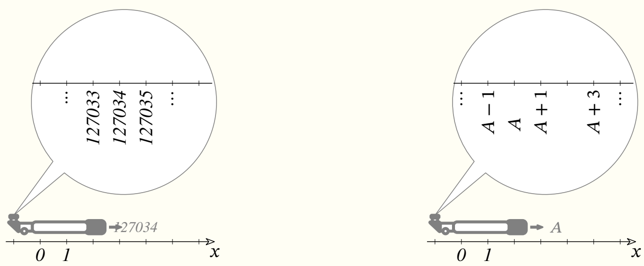
Si può osservare come ci siano microscopi “standard” che ingrandiscono un numero *finito* di volte e microscopi “non standard” che ingrandiscono *infinite* volte (ricordiamoci che $\dfrac{1}{\varepsilon}$ è un infinito.

Telescopi

Il telescopio permette di avvicinare una porzione di retta senza cambiare la sua scala. Con un telescopio possiamo visualizzare i seguenti numeri:

Esempio 5.6:

- $+127034$
- -3600
- $A + 3$
- $-B + 2$



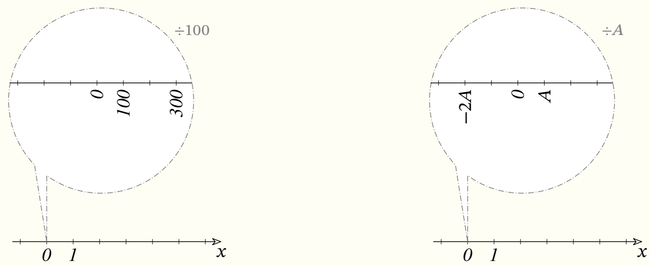
Anche per i telescopi, i modelli più moderni offrono la possibilità di operare ingrandimenti “standard” o “non standard” a piacere.

Grandangoli (Zoom Out)

Il Grandangolo permette di cambiare la scala della visualizzazione della retta, in questo modo possiamo far rientrare nel campo visivo anche numeri molto lontani. Possiamo usare un grandangolo per visualizzare i seguenti numeri:

Esempio 5.7:

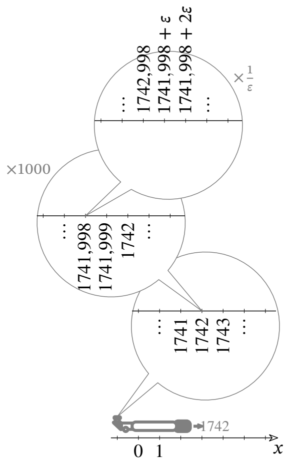
- 300
- -5000
- $-2A$
- $3B$



Anche per i grandangoli utilizzeremo versioni che permettono zoomate “standard” e “non standard”.

Combinazione di strumenti

Questi strumenti sono “modulari”, possono essere combinati a piacere. Per esempio per visualizzare il numero non standard: $1741{,}998 + 2\varepsilon$ posso utilizzare in sequenza un telescopio per avvicinarmi al numero, un microscopio standard per poter vedere i millesimi e un microscopio non standard per vedere il numero infinitamente vicino al numero standard.



Operazioni e tipo del risultato

Vediamo di seguito alcune regole relative alle operazioni che valgono nei numeri iperreali. A volte nell’eseguire un’operazione tra iperreali non siamo interessati al valore preciso, ma ci basta sapere il tipo del risultato. In questo paragrafo esploriamo il tipo del risultato delle quattro operazioni aritmetiche.

Teniamo presente che, essendo gli iperreali un’*estensione* dei reali, quando il numero iperreale è un numero reale, valgono le stesse proprietà delle operazioni nei reali.

In particolare:

zero è l’elemento neutro dell’addizione e elemento assorbente per la moltiplicazione;

uno è elemento neutro della moltiplicazione;

la divisione per zero non è definita.

Addizione

Alcune osservazioni:

1. Le regole relative all'addizione valgono anche per la sottrazione, se uno degli addendi è negativo.
2. Un infinitesimo più un altro infinitesimo dà per risultato un infinitesimo: $\alpha + \beta = \gamma$.
3. Un infinitesimo non nullo più un altro infinitesimo non nullo può dare per risultato anche zero: ...
4. Un finito più un infinitesimo dà come risultato un finito.
5. Un finito più un finito dà come risultato un finito.
6. Un finito più un finito può dare come risultato un infinitesimo.
7. Un infinito più un finito dà come risultato un infinito.
8. Un infinito più un infinito può dare come risultato zero, un infinitesimo, un finito non infinitesimo, un infinito.

x	i	f	I	$I\ pos$	$I\ neg$
$-x$	i	f	I	$I\ neg$	$I\ pos$

$+$	i	fni	I
i	i	fni	I
fni	fni	f	I
I	I	I	?

Moltiplicazione

Alcune osservazioni:

1. Un infinitesimo per un altro infinitesimo dà per risultato un infinitesimo: $\alpha \cdot \beta = \gamma$.
2. Un infinitesimo non nullo per un altro infinitesimo non nullo dà per risultato un infinitesimo non nullo.
3. ...
4. ...
5. Il prodotto fra un finito e un infinitesimo richiama le osservazioni fatte sul postulato di Eudosso-Archimede.

$\times$	i	fni	I
i	i	i	?
fni	i	fni	I
I	?	I	I

Reciproco e divisione

Da quanto detto riguardo a infinitesimi e infiniti, possiamo ricavare la tabella dei reciproci.

x	inn	fni	I
$1/x$	I	fni	inn

E combinandola con la tabella della moltiplicazione ottenere quella della divisione.

$\div$	inn	fni	I
inn	?	inn	inn
fni	I	fni	inn
I	I	I	?

Osservazione 5.4: *Non ci sono regole immediate per le seguenti operazioni:*

- $\dfrac{\varepsilon}{\delta}$
- $\dfrac{A}{B}$
- $A \cdot \varepsilon$
- $A + B$

In questi casi il tipo di risultato dipende dall'effettivo valore degli operandi. Ad esempio, nel caso del quoziente tra due infinitesimi possiamo trovarci nelle seguenti situazioni:

- $\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon$ *(i)*
- $\dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon} = 2$ *(fni)*
- $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2} = \dfrac{1}{\varepsilon}$ *(I)*

Possiamo ora esercitarci nel calcolo con questi nuovi numeri. Continuiamo ad utilizzare la convenzione di indicare gli infinitesimi con lettere greche minuscole ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$), i finiti non infinitesimi con lettere latine minuscole ($a, b, c, \dots, m, n, \dots$) e gli infiniti con lettere latine maiuscole ($A, B, C, \dots, M, N, \dots$).

Semplifichiamo le seguenti espressioni scrivendo il tipo di risultato ottenuto.

Esempio 5.8: $3\varepsilon + 5 + 6M - 2\varepsilon + 7 - 2M = 4M + 12 + \varepsilon \quad (tipo = I)$

Osservazione 5.5: *Quando il risultato è la somma di più elementi, li scriviamo ordinandoli dal più grande, in valore assoluto, al più piccolo.*

Esempio 5.9: $7 + 8M - 5\varepsilon - 4 + 3\varepsilon - 2N = 8M - 2N + 3 - 2\varepsilon$ *(tipo non definito)*

Esempio 5.10: $(3M + 2\varepsilon)(3M - 2\varepsilon) = 9M - 4\varepsilon$ *(tipo=I)*

Esempio 5.11: $(M + 3)(M - 3) - (M + 2)^2 + 4(M + 3) =$
$= M^2 - 9 - M^2 - 4M - 4 + 4M + 12 = -1$ *(tipo=fni)*

Esempio 5.12: $10a - (A + 1)^2 - 3a + 2(a + 2\alpha) + A^2 + 6(b - 3\alpha) + 2A =$
$= 10a - A^2 - 2A - 1 - 3a + 2a + 4\alpha + A^2 + 6b - 18\alpha + 2A = 9a + 6b - 14\alpha$
(tipo=fni)

Confronto

L'insieme dei numeri Reali ha un ordinamento completo, se a e b sono due numeri reali qualunque è sempre valida una e una sola delle seguenti affermazioni:

$$a < b \quad a = b \quad b < a$$

Per confrontare due numeri Reali possiamo utilizzare le seguenti regole:

1. qualunque numero negativo è minore di qualunque numero positivo;

2. se due numeri sono negativi, è minore quello che ha il modulo maggiore;
3. se a e b sono due numeri positivi,

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \quad (\text{o} \quad b - a > 0\,)$$

oppure

$$a < b \Leftrightarrow \frac{a}{b} < 1 \quad (\text{o} \quad \frac{b}{a} > 1\,)$$

Osservazione 5.6: *Le prime due regole ci permettono di restringere le nostre riflessioni al solo caso del confronto tra numeri positivi. Nei prossimi paragrafi assumeremo che le variabili si riferiscano solo a numeri positivi.*

Osservazione 5.7: *Nella terza regola abbiamo presentato due criteri. Quello usato di solito è il primo, ma useremo anche il secondo perché il rapporto tra due grandezze permette di ottenere informazioni interessanti.*

Per il principio di *transfer* le stesse regole che valgono per i reali, valgono anche per i numeri iperreali.

Restringendo l'osservazione ai numeri positivi possiamo affermare che gli infinitesimi sono più piccoli dei non infinitesimi e i finiti sono più piccoli degli infiniti:

$$i \quad < \quad fni \quad < \quad I$$

Passiamo ora al confronto all'interno dei diversi tipi di numeri iperreali.

Confronto tra finiti non infinitesimi

Se due numeri iperreali hanno parte standard diversa allora è maggiore quello che ha la parte standard maggiore:

$$x < y \Leftrightarrow \mathrm{st}\,(x) < sty$$

Nel caso i due numeri abbiano la stessa parte standard si deve studiare l'ordinamento degli infinitesimi, cosa che faremo nel prossimo paragrafo.

Confronto tra infinitesimi

Di seguito vediamo i diversi casi in cui ci possiamo imbattere quando vogliamo confrontare i numeri infinitesimi.

Zero Zero è minore di qualunque infinitesimo positivo:

$$\varepsilon - 0 = \varepsilon > 0$$

Somma La somma di infinitesimi positivi è maggiore di ognuno dei due:

$$(\varepsilon + \delta) - \varepsilon = \delta > 0$$

Multiplo Il multiplo di un infinitesimo positivo è maggiore dell'infinitesimo di partenza. Usando il primo metodo per il confronto:

$$\forall n > 1 \quad n\varepsilon - \varepsilon = (n-1)\,\varepsilon > 0$$

e usando il secondo metodo:

$$\forall n > 1 \quad \frac{n\varepsilon}{\varepsilon} = n > 1$$

Sottomultiplo Il sottomultiplo di un infinitesimo è minore dell'infinitesimo di partenza. Usando il primo metodo per il confronto:

$$\forall n > 1 \quad \frac{\varepsilon}{n} - \varepsilon = \frac{\varepsilon - n\varepsilon}{n} = \frac{(1-n)\,\varepsilon}{n} < 0$$

e usando il secondo metodo:

$$\forall n > 1 \quad \frac{\varepsilon}{n} : \varepsilon = \frac{\varepsilon}{n\varepsilon} = \frac{1}{n} < 1$$

Definizione 5.7: *Diremo che γ e ε sono* ***infinitesimi dello stesso ordine*** *se il rapporto tra γ e ε è un finito non infinitesimo.*

Parte infinitesima di un infinitesimo La parte infinitesima di un infinitesimo positivo è minore dell'infinitesimo di partenza. Se γ è un infinitesimo di un infinitesimo ε cioè $\gamma = \delta\varepsilon$ allora:

$$\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \delta < 1$$

In questo caso il rapporto non solo è più piccolo di 1 ma è addirittura un *infinitesimo*, cioè γ è una parte infinitesima di ε. In questo caso si dice che γ è un infinitesimo di *ordine superiore* a ε e si scrive:

$$\gamma = o(\varepsilon)$$

Definizione 5.8: *Diremo che γ è un* ***infinitesimo di ordine superiore*** *all'infinitesimo ε se il rapporto tra γ e ε è un infinitesimo:*

$$\gamma = o(\varepsilon) \;\Leftrightarrow\; \frac{\gamma}{\varepsilon} = \delta \approx 0$$

Diremo anche che ε è un ***infinitesimo di ordine inferiore*** *a γ.*

Confronto tra infiniti

Anche tra gli infiniti possiamo effettuare il confronto calcolando la differenza tra due numeri o il quoziente e anche tra gli infiniti l'uso del quoziente ci dà delle informazioni interessanti. Per semplicità consideriamo M e N infiniti positivi.

Infinito più finito Se a è un finito positivo (anche infinitesimo), confrontiamo $M + a$ con M. Usando il primo metodo:

$$M + a - M = a > 0$$

e usando il secondo metodo:

$$\frac{M + a}{M} = \frac{M}{M} + \frac{a}{M} = 1 + \frac{a}{M} > 1$$

Somma di infiniti Se M e N sono due infiniti positivi, confrontiamo $M + N$ con M. Usando il primo metodo:

$$M + N - M = N > 0$$

e usando il secondo metodo:

$$\frac{M + N}{M} = \frac{M}{M} + \frac{N}{M} = 1 + \frac{N}{M} > 1$$

Multiplo Se $n > 1$, confrontiamo nM con M. Usando il primo metodo:

$$\forall n > 1 \quad nM - M = (n - 1)M > 0$$

e usando il secondo metodo:

$$\frac{nM}{M} = n > 1$$

Definizione 5.9: *Diremo che M e N sono **infiniti dello stesso ordine** se il rapporto tra M e N è un finito non infinitesimo.*

Infinito di infinito Confrontiamo MN con M. Usando il primo metodo:

$$MN - M = (N - 1)M > 0$$

e usando il secondo metodo:

$$\frac{MN}{M} = N > 1$$

In questo caso il rapporto non solo è maggiore di 1 ma è addirittura un *infinito*.

Definizione 5.10: *Diremo che M è un **infinito di ordine superiore** a N se il rapporto tra M e N è un infinito:*

$$M = \omega(N) \Leftrightarrow \frac{M}{N} = I$$

*Diremo anche che N è un **infinito di ordine inferiore** a M.*

A volte il confronto tra due iperreali è meno immediato dei casi precedenti.

Esempio 5.13: *Confrontare* M *e* 2^M. *Dobbiamo calcolare:* $\frac{M}{2^M}$. *Possiamo usare un duplice trucco:*

- *invece di confrontare* M *e* 2^M *confrontiamo* M^2 *e* 2^M*;*
- *invece che confrontare direttamente i due valori richiesti, vediamo come si comportano, con numeri naturali piccoli, le due funzioni* $y_1 = x^2$ *e* $y_2 = 2^x$

x^2	0	1	4	9	16	25	36
2^x	1	2	4	8	16	32	64

Possiamo vedere che dal quinto elemento in poi la prima successione è sempre minore della seconda ed essendo l'infinito più grande di cinque otteniamo che $2^M > M^2$ *quindi possiamo scrivere:*

$$\frac{M}{2^M} < \frac{M}{M^2} = \frac{1}{M} < 1$$

Ma $\frac{1}{M}$ *è un infinitesimo quindi* M *è un infinito di ordine inferiore a* 2^M.

In conclusione, possiamo confrontare fra di loro i numeri iperreali utilizzando la differenza o il quoziente tra i numeri. L'uso del quoziente ci permette di ricavare un'informazione interessante: l'ordine di infinitesimo o di infinito.

- un infinitesimo di ordine superiore è un infinitesimo infinitamente più piccolo;
- un infinito di ordine superiore è un infinito infinitamente più grande.

Indistinguibili

Quando risolviamo un problema pratico, a noi serve, alla fine dei calcoli, ottenere un numero razionale, con un certo numero di cifre significative. È chiaro che se il risultato di un calcolo è $4{,}37 + 5\varepsilon$, sostituire questo risultato con il più semplice 4,37 non ci fa perdere in precisione e in questo caso 5ε può essere trascurato. Ben diverso è se all'interno di un calcolo otteniamo: $\varepsilon + 5\varepsilon$, in questo caso non posso trascurare 5ε anche se è una quantità infinitesima.

In certi casi posso avere due espressioni diverse che, in prima approssimazione, possono essere considerate equivalenti. Quando è così dirò che i due numeri iperreali sono *indistinguibili*. Due numeri sono indistinguibili quando la differenza tra i due è infinitesima rispetto a ciascuno dei due.

Definizione 5.11: *Due numeri si dicono* ***indistinguibili*** *(simbolo:* $\sim$*) se il rapporto tra la loro differenza e ciascuno di essi è un infinitesimo:*

$$x \sim y \Leftrightarrow \left(\frac{y-x}{x} = \varepsilon \quad e \quad \frac{y-x}{y} = \delta \right)$$

Osservazione 5.8: *È importante osservare che per poter applicare la definizione entrambi i numeri che vogliamo confrontare devono essere diversi da* zero. *Cioè un numero diverso da zero non può mai essere considerato indistinguibile da zero.*

Di seguito esploriamo i tre casi possibili.

Finiti non infinitesimi

Se due numeri finiti non infinitesimi differiscono per un infinitesimo, sono indistinguibili.

Teorema 5.1: *Due numeri x e y, finiti non infinitesimi, sono indistinguibili se e solo se sono infinitamente vicini:*

$$x \approx y \Leftrightarrow x \sim y$$

Iniziamo dimostrando che se sono infinitamente vicini allora sono indistinguibili:

$$\text{Ipotesi: } (x,\ y:\ fni \text{ e } y = x + \varepsilon) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Tesi: } x \sim y.$$

Dimostrazione

$$\frac{y-x}{x} = \frac{(x+\varepsilon)-x}{x} = \frac{\varepsilon}{x} = \gamma \quad \text{e} \quad \frac{y-x}{y} = \frac{(x+\varepsilon)-x}{y} = \frac{\varepsilon}{y} = \delta$$

Il teorema inverso dirà:

$$\text{Ipotesi: } (x,\ y:\ fni \text{ e } x \sim y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Tesi: } x \approx y.$$

Dimostrazione

$$\frac{y-x}{x} = \varepsilon \Rightarrow y - x = \varepsilon x \Rightarrow y = x + \varepsilon x = y + \beta$$

(Il caso $\dfrac{y-x}{y}$ a questo punto è banale.)

Infinitesimi

Per quanto riguarda gli infinitesimi, non basta che siano infinitamente vicini, infatti tutti gli infinitesimi sono infinitamente vicini tra di loro. Per essere indistinguibili serve una condizione più restrittiva.

Teorema 5.2: *Due numeri α e β, infinitesimi, sono indistinguibili se e solo se la loro differenza è un infinitesimo di ordine superiore.*

$$\beta - \alpha = o(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \sim \beta$$

Osservazione 5.9: *Se due infinitesimi differiscono per un infinitesimo di ordine superiore allora sono dello stesso ordine, quindi la differenza sarà di ordine superiore sia al primo sia al secondo infinitesimo.*

Iniziamo dimostrando che se differiscono per un infinitesimo di ordine superiore allora sono indistinguibili:

$$\text{Ipotesi: } (\alpha,\ \beta\ :\ inn\ \text{ e }\ \beta = \alpha + o(\alpha)) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Tesi: } \alpha \sim \beta$$

Dimostrazione

$$\frac{\beta-\alpha}{\alpha} = \frac{(\alpha+o(\alpha))-\alpha}{\alpha} = \frac{o(\alpha)}{\alpha} = \gamma \quad \text{e} \quad \frac{\beta-\alpha}{\beta} = \frac{(\alpha+o(\alpha))-\alpha}{\beta} = \frac{o(\beta)}{\beta} = \delta$$

Il teorema inverso dirà:

$$\text{Ipotesi: } (\alpha,\ \beta\ :\ inn\ \text{ e }\ \alpha \sim \beta) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Tesi: } \beta - \alpha = o(\alpha)$$

Dimostrazione

$$\frac{\beta-\alpha}{\alpha} = \varepsilon \Rightarrow \beta - \alpha = \varepsilon\alpha \Rightarrow \beta - \alpha = o(\alpha)$$

Infiniti

La situazione si ribalta se i due numeri sono infiniti infatti, in questo caso, sono indistinguibili anche se la loro differenza è un valore finito o addirittura infinito.

Si può dimostrare il seguente

Teorema 5.3: *Due numeri M e N, infiniti, sono indistinguibili se e solo se la loro differenza è un finito o un infinito di ordine inferiore.*

$$M - N = a \Rightarrow M \sim N$$

e vale anche:

$$(M - N = P \text{ con } P \text{ infinito di ordine inferiore }) \Rightarrow M \sim N$$

Di seguito dimostriamo che se differiscono per un finito allora sono indistinguibili:

$$\text{Ipotesi: } (M,\ N\ :\ I\ \text{ e }\ N = M + a) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Tesi: } M \sim N$$

Dimostrazione

$$\frac{M-N}{M} = \frac{M-(M+a)}{M} = -\frac{a}{M} = \varepsilon \quad \text{e} \quad \frac{M-N}{N} = \frac{M-(N+a)}{N} = -\frac{a}{N} = \delta$$

In modo analogo si può procedere con la seconda parte del teorema.

Principio di tranfer

Abbiamo applicato agli iperreali le operazioni aritmetiche con grande naturalezza estendendo i metodi e i risultati che già conosciamo nei Reali. Ma è possibile fare ciò per qualunque funzione? Sì, è possibile assumere che per ogni funzione definita nei Reali esista una corrispondente funzione con dominio e codominio negli Iperreali che, ristretta ai Reali, coincida con la funzione reale. In questo modo tutto quello che è possibile fare con i numeri Reali lo si può fare anche con gli Iperreali.

Osservazione 5.10: *Non vale il viceversa. Dato che gli Iperreali estendono i Reali, ci sono delle funzioni che, definite negli Iperreali, non hanno un valore corrispondente nei Reali. Ad esempio la funzione iperreale* parte standard *non ha una funzione corrispondente nei numeri reali.*

Esempio 5.14: *Consideriamo ad esempio la funzione:* $f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\; e \;\; x \neq 0$
È facile costruire la funzione $\star f$ *(*effe star*) con dominio e codominio negli Iperreali:*
$\star f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad \forall x \in {}^*\mathbb{R} \;\; e \;\; x \neq 0.$
Ogni volta che $\star f$ *è applicata a numeri standard, si comporta come la funzione* f*, applicata a* $x \in \mathbb{R}$*; ma, in più, la funzione* $\star f$*:*

- *è definita anche per valori infinitamente vicini a zero e in questo caso dà come risultato un valore infinito che non è un numero reale;*
- *è definita anche per valori infiniti e in questo caso dà come risultato un valore infinitesimo che non è un numero reale.*

5.3 Applicazioni

Dopo aver dato un'occhiata a cosa sono e come funzionano i numeri iperreali vediamo qualche problema che si può convenientemente risolvere con questi numeri.

Espressioni con gli iperreali

I problemi concreti si esprimono sempre con numeri razionali, poi, per semplificane la soluzione e poter utilizzare metodi più potenti, vengono trasportati in insiemi numerici più complessi come gli iperreali e, una volta risolti, le soluzioni vengono ritradotte in numeri razionali magari passando per i reali con l'uso della funzione st ().

Vediamo, con alcuni esempi, come si possono applicare le regole presentate in precedenza al calcolo di espressioni contenenti numeri iperreali.

Ricordiamo che con lettere greche minuscole indichiamo infinitesimi e con lettere latine maiuscole indichiamo infiniti.

Esempio 5.15: *Calcola un valore reale dell'espressione iperreale:* $\dfrac{7-2\varepsilon}{9+3\delta}$

$$\mathrm{st}\left(\frac{7-2\varepsilon}{9+3\delta}\right) \overset{1}{=} \frac{\mathrm{st}\,(7-2\varepsilon)}{\mathrm{st}\,(9+3\delta)} \overset{2}{=} \frac{\mathrm{st}\,(7-\alpha)}{\mathrm{st}\,(9+\beta)} \overset{3}{=} \frac{7}{9}$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. *La parte standard di una frazione con denominatore non infinitesimo è la frazione delle parti standard;*
2. *se* ε *e* δ *sono infinitesimi, anche* 2ε *e* 3δ *sono infinitesimi;*
3. *la parte standard della soma di un reale e di un infinitesimo è il reale stesso.*

Esempio 5.16: *Calcola un valore reale dell'espressione:* $\dfrac{4\varepsilon^4 - 7\varepsilon^3}{5\varepsilon}$ (*con* $\varepsilon \neq 0$)

$$\operatorname{st}\left(\frac{4\varepsilon^4 - 7\varepsilon^3}{5\varepsilon}\right) \stackrel{1}{=} \operatorname{st}\left(\frac{(4\varepsilon^3 - 7\varepsilon^2)\cancel{\varepsilon}}{5\cancel{\varepsilon}}\right) \stackrel{2}{=} \operatorname{st}\left(\frac{4\varepsilon^3 - 7\varepsilon^2}{5}\right) \stackrel{3}{=} \operatorname{st}\left(\frac{\alpha}{5}\right) \stackrel{4}{=} \operatorname{st}(\beta) \stackrel{5}{=} 0$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. *si può raccogliere* ε *al numeratore;*
2. *dato che* ε *è diverso da zero, si può semplificare la frazione;*
3. *finiti per infinitesimi sono infinitesimi, la loro somma è un infinitesimo:* α*;*
4. *il rapporto tra un infinitesimo e un non infinitesimo è un infinitesimo che chiamiamo* β*;*
5. *La parte standard di un infinitesimo è zero.*

Esempio 5.17: *Calcola:* $\operatorname{st}\left(\dfrac{-6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 - 8\varepsilon^5}{7\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4}\right)$ (*con* $\varepsilon \neq 0$)

$$\operatorname{st}\left(\frac{-6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 - 8\varepsilon^5}{7\varepsilon^3 + 2\varepsilon^4}\right) \stackrel{1}{=} \operatorname{st}\left(\frac{-6\cancel{\varepsilon^2}}{7\varepsilon^{\cancel{3}}}\right) \stackrel{2}{=} \operatorname{st}\left(-\frac{6}{7\varepsilon}\right) \stackrel{3}{=} \operatorname{st}(-M) \xrightarrow{4} N.D.$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. *tengo solo la parte principale dei polinomi ottenendo un'espressione indistinguibile che, quindi ha la stessa parte standard;*
2. *semplifico i fattori uguali;*
3. *il quoziente tra un finito e un infinitesimo non nullo è un infinito (M);*
4. *non è definita la parte standard di un numero infinito.*

Osservazione 5.11:

Esempio 5.18: *Riduci l'espressione* $\dfrac{4\varepsilon^4 - 7\varepsilon^3}{5\varepsilon}$ (*con* $\varepsilon \neq 0$) *usando la relazione di indistinguibilità:*

$$\frac{4\varepsilon^4 - 7\varepsilon^3}{5\varepsilon} \stackrel{1}{\sim} \frac{7\varepsilon^{\cancel{3}}}{5\cancel{\varepsilon}} \stackrel{2}{=} \frac{7\varepsilon^2}{5}$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. *nei polinomi, considero solo gli infinitesimi di ordine inferiore;*
2. *riduco la frazione semplificando i fattori uguali.*

Esempio 5.19: *Riduci l'espressione:* $\dfrac{5\varepsilon - 3\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3}{2\varepsilon + 4\varepsilon^2}$ *(con* $\varepsilon \neq 0$*) usando la relazione di indistinguibilità:*

$$\frac{5\varepsilon - 3\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3}{2\varepsilon + 4\varepsilon^2} \overset{1}{\sim} \frac{5\cancel{\varepsilon}}{2\cancel{\varepsilon}} \overset{2}{=} \frac{5}{2}$$

1. *nei polinomi considero solo gli infinitesimi di ordine minore;*
2. *riduco la frazione semplificando i fattori uguali.*

Esempio 5.20: *Riduci l'espressione* $\operatorname{st}\left(\dfrac{-3H^2 - 4H}{2H^2 + 4H - 3}\right)$ *usando la relazione di indistinguibilità:*

$$\frac{-3H^2 - 4H}{2H^2 + 4H - 3} \overset{1}{\sim} \frac{-3\cancel{H^2}}{2\cancel{H^2}} \overset{2}{=} \frac{-3}{2}$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. *nei polinomi considero solo gli infiniti ordine maggiore;*
2. *semplifico i fattori uguali al numeratore e al denominatore.*

Esempio 5.21: *Riduci l'espressione* $\operatorname{st}((7 - 3\varepsilon) - (7 + 8\varepsilon))$*:*

> **Osservazione 5.12:** *Si potrebbe pensare che essendo* $7 - 3\varepsilon$ *indistinguibile da* 7 *e* $7 + 8\varepsilon$ *indistinguibile da* 7 *la precedente espressione sia indistinguibile da* $7 - 7 = 0$*. Ma il concetto di indistinguibile non si può mai applicare tra un numero e lo zero quindi non possiamo dire che* $(7 - 3\varepsilon) - (7 + 8\varepsilon) \sim 0$ *e tanto meno:* $(7 - 3\varepsilon) - (7 + 8\varepsilon) = 0$*.*

In questo caso la soluzione è semplice...

$$(7 - 3\varepsilon) - (7 + 8\varepsilon) \overset{1}{=} \cancel{+7} - 3\varepsilon \cancel{-7} - 8\varepsilon \overset{2}{\sim} -11\varepsilon$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. *semplifichiamo l'espressione eliminando le parentesi;*
2. $+7$ *e* -7 *si annullano*
3. *nel polinomio che otteniamo, la parte principale è costituita dagli infinitesimi di primo ordine.*

Esempio 5.22: *Riduci l'espressione* $(5+\varepsilon)^2 - (5-\varepsilon)(5+\varepsilon)$*:*

$$(5+\varepsilon)^2 - (5-\varepsilon)(5+\varepsilon) \stackrel{1}{=} \left(25+2\varepsilon+\varepsilon^2\right) - \left(25-\varepsilon^2\right) \stackrel{2}{=} 25-25=0$$

Osservazione 5.13: *Anche qui abbiamo usato l'indistinguibilità tra un numero diverso da zero e zero:* non va bene*!*

In questo caso la soluzione corretta è:

$$(5+\varepsilon)^2 - (5-\varepsilon)(5+\varepsilon) \stackrel{1}{=} \left(25+2\varepsilon+\varepsilon^2\right) - \left(25-\varepsilon^2\right) \stackrel{2}{=} \cancel{25} + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \cancel{-25} - \varepsilon^2 =$$
$$= 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 \stackrel{3}{\sim} 2\varepsilon$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. *svolgiamo i prodotti (notevoli);*
2. $+25$ *e* -25 *si annullano;*
3. *nel polinomio, consideriamo gli infinitesimi di ordine minore.*

Esempio 5.23: *Riduci l'espressione* $\sqrt{9H^2 - 12H} - \sqrt{9H^2 + 1}$ *usando la relazione di indistinguibilità:*

> **Osservazione 5.14:** *Anche qui si potrebbe pensare che essendo* $9H^2 - 12H$ *indistinguibile da* $9H^2$ *e* $9H^2 + 1$ *indistinguibile da* $9H^2$*, e che quindi la precedente espressione sia indistinguibile da*
> $\sqrt{9H^2} - \sqrt{9H^2} = 0$
> *Ma il concetto di indistinguibile, non si può* mai *applicare tra un numero e lo zero quindi non possiamo dire che* $\sqrt{9H^2 - 12H} - \sqrt{9H^2 + 1} \sim 0$.

Per risolvere questa situazione usiamo un trucco: la razionalizzazione del numeratore.

$$\sqrt{9H^2 - 12H} - \sqrt{9H^2 + 1} \overset{1}{=} \left(\sqrt{9H^2 - 12H} - \sqrt{9H^2 + 1}\right) \cdot 1 \overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=} \frac{\sqrt{9H^2 - 12H} - \sqrt{9H^2 + 1}}{1} \cdot \frac{\sqrt{9H^2 - 12H} + \sqrt{9H^2 + 1}}{\sqrt{9H^2 - 12H} + \sqrt{9H^2 + 1}} \overset{3}{=}$$

$$\overset{3}{=} \frac{\cancel{9H^2} - 12H - \cancel{9H^2} - 1}{\sqrt{9H^2 - 12H} + \sqrt{9H^2 + 1}} \overset{4}{\sim} \frac{-12H}{\sqrt{9H^2} + \sqrt{9H^2}} \overset{5}{=} \frac{-12H}{6|H|} = -2\frac{H}{|H|}$$

Dove i passaggi hanno i seguenti motivi:

1. *la prima uguaglianza è banale essendo 1 l'elemento neutro della moltiplicazione;*
2. *al posto del numero 1 sostituisco un'opportuna frazione con il numeratore e il denominatore uguali;*
3. *eseguendo il prodotto magari tenendo conto di uno dei prodotti notevoli* $(a-b)(a+b)$*), ottengo questa frazione che non sembra aver semplificato il problema iniziale;*
4. *ma ora, a denominatore, ho una* somma *tra le due radici e quindi posso ottenere un'espressione più semplice indistinguibile da quella originale;*
5. *estraiamo le radici, sommiamo e semplifichiamo.*

Problemi con gli iperreali

Cornici e differenze

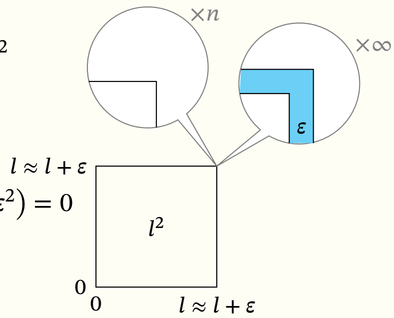
Esempio 5.24: *Calcola l'area iperreale di una cornice quadrata, di lato interno pari a l e spessore infinitesimo ε. Calcola il valore reale di questa area e il rapporto tra l'area e lo spessore infinitesimo della cornice.*

Chiamiamo dS l'area iperreale della cornice:

$$dS = (l+\varepsilon)^2 - l^2 = l^2 + 2l\varepsilon + \varepsilon^2 - l^2 = 2l\varepsilon + \varepsilon^2$$

Chiamiamo ΔS la corrispondente area reale:

$$\Delta S = \mathrm{st}(dS) = \mathrm{st}\left(2l\varepsilon + \varepsilon^2\right) = \mathrm{st}(2l\varepsilon) + \mathrm{st}\left(\varepsilon^2\right) = 0$$



Poiché la differenza di area dS è la somma di due infinitesimi, uno del primo e l'altro del secondo ordine, la parte standard di entrambi è nulla e la somma risulta nulla.

Mentre l'area di questa cornice è infinitesima, il rapporto tra quest'area e il suo spessore ha un valore non infinitesimo:

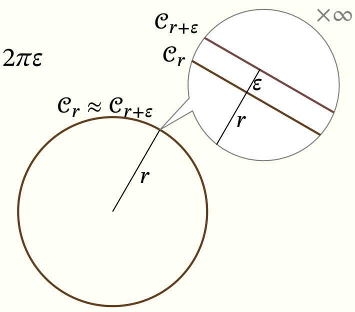
$$\frac{dS}{\varepsilon} = \frac{\cancel{\varepsilon}(2l+\varepsilon)}{\cancel{\varepsilon}} = 2l + \varepsilon$$

e la sua parte standard è: $\mathrm{st}(2l+\varepsilon) = 2l$.

Esempio 5.25: *Calcola di quanto varia una circonferenza di raggio* r*, quando il raggio subisce una variazione infinitesima* $\mathrm{d}r = \varepsilon$ *(*$\varepsilon \neq 0$.

Chiamiamo $\mathrm{d}C$ *(differenza di* C*) la variazione della circonferenza:*

$$dC = 2\pi(r+\varepsilon) - 2\pi r = 2\pi r - 2\pi r - 2\pi\varepsilon = 2\pi\varepsilon$$



Possiamo osservare che la variazione della lunghezza della circonferenza ha lo stesso segno di ε*, quindi se* $\varepsilon > 0$ *la circonferenza aumenta, se* $\varepsilon < 0$ *la circonferenza diminuisce.*
In ogni caso la circonferenza varia di un infinitesimo e: $\operatorname{st}(2\pi\varepsilon) = 0$.

Ma se calcoliamo il rapporto tra la variazione della circonferenza e la variazione del raggio, abbiamo:

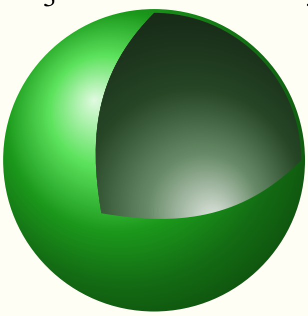
$$\frac{dC}{dr} = \frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon} = 2\pi$$

Ogni unità di variazione del raggio, comporta una variazione della circonferenza pari a 2π.

Esempio 5.26: *Quanto volume acquisisce un guscio sferico di raggio r nel gonfiarsi progressivamente?*

Volume iniziale:
$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. *Se il raggio aumenta e diventa* $r + \varepsilon$ *(con* $r \neq 0$*), la variazione di volume sarà:*

$$dV = V(r+\varepsilon) - V(r) = \frac{4}{3}\pi(r+\varepsilon)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 =$$
$$= \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2\varepsilon + 3r\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - r^3) =$$
$$= \frac{4}{3}\pi(3r^2\varepsilon + 3r\varepsilon^2 + \varepsilon^3) = \frac{4}{3}\pi\varepsilon(3r^2 + 3r\varepsilon + \varepsilon^2)$$



Per sapere quanto varia il volume per ogni variazione infinitesima di raggio, si calcola:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\frac{4}{3}\pi\varepsilon(3r^2 + 3r\varepsilon + \varepsilon^2)}{\varepsilon} = \frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3r\varepsilon + \varepsilon^2)$$

che è un numero di finito.
La sua parte standard è $\mathrm{st}\left(\frac{dV}{dr}\right) = 4\pi r^2$. *Nota che questa è l'espressione dell'area della superficie sferica. Come era prevedibile, infatti, un guscio sferico di spessore infinitesimo approssima la superficie sferica.*

Pendenza e tangenti

Riprendiamo il problema di calcolare la tangente ad una parabola in un suo punto e lo affrontiamo usando i numeri iperreali. Ricordiamo che la tangente ad una curva in un punto T è una retta che passa per T e ha la stessa pendenza della curva in quel punto. Possiamo riassumere così i passi da svolgere:

1. calcolo l'ordinata del punto di tangenza T;
2. calcolo la pendenza della curva in T;
3. scrivo l'equazione del fascio di rette passanti per T;
4. sostituisco il valore trovato nell'equazione del fascio di rette.

Il punto più complicato è il secondo, ma proprio qui il calcolo con gli infinitesimi ci può aiutare.

Una retta ha, in ogni suo punto la stessa pendenza che calcoliamo come:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Questo valore è anche detto coefficiente angolare della retta.

Una parabola, o qualunque altra curva in ogni punto ha una pendenza diversa, nonostante questo, è possibile calcolare la pendenza di una parabola in un punto qualsiasi usando la stessa formula usata per la retta a patto di prendere un Δx infinitesimo e di calcolare il corrispondente Δy.

Chiamando dx (de ics) un incremento infinitesimo di x e dy (de ipsilon) un incremento infinitesimo di y, la pendenza nel punto x_0 sarà:

$$m = \operatorname{st}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{(x_0 + \varepsilon) - x_0}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}\right)$$

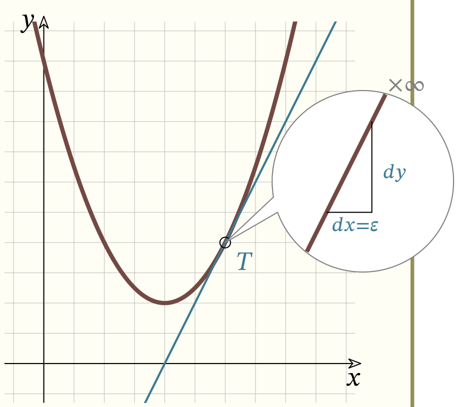
se esiste la parte standard e è sempre la stessa qualunque sia l'infinitesimo usato nel calcolo.

Vediamo qualche esempio.

Esempio 5.27:
Considerata la parabola di equazione:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 10$$

calcola la sua pendenza nel punto di ascissa $x_0 = 6$.
Chiamiamo ε l'incremento infinitesimo di x. Il corrispondente incremento di y sarà:



$$m = \operatorname{st}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{f(6+\varepsilon) - f(6)}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \operatorname{st}\left(\frac{\frac{1}{2}(6+\varepsilon)^2 - 4(6+\varepsilon) + 10 - \frac{1}{2}(6)^2 - 4(6) + 10}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \operatorname{st}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(36 + 12\varepsilon + \varepsilon^2\right) - 24 - 4\varepsilon + 10 - 4}{\varepsilon}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{18 + 6\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - 24 - 4\varepsilon + 10 - 4}{\varepsilon}\right) =$$

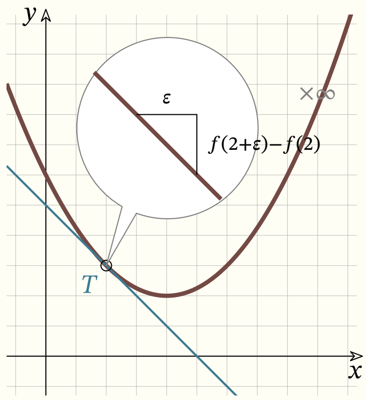
$$= \operatorname{st}\left(\frac{+2\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2}{\varepsilon}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{+2\cancel{\varepsilon}}{\cancel{\varepsilon}}\right) = 2.$$

La tangente in quel punto è:

$$y = m(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = 2(x - 6) + 4 \Rightarrow y = 2x - 8$$

Esempio 5.28:

Calcola la tangente alla parabola: $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 6$ *nel punto di ascissa:* $x_0 = 2$.



1. calcoliamo l'ordinata del punto di tangenza T:

$$f(2) = 0{,}25 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 6 = 1 - 4 + 6 = 3$$

2. scriviamo l'equazione del fascio di rette per T:

$$y = m\,(x - x_0) + y_0 \;\Rightarrow\; y = m\,(x - 2) + 3$$

3. calcoliamo la pendenza della curva in T:

$$m = \operatorname{st}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{f(2+\varepsilon) - f(2)}{\varepsilon}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{0{,}25(2+\varepsilon)^2 - 2(2+\varepsilon) + 6 - 3}{\varepsilon}\right) =$$

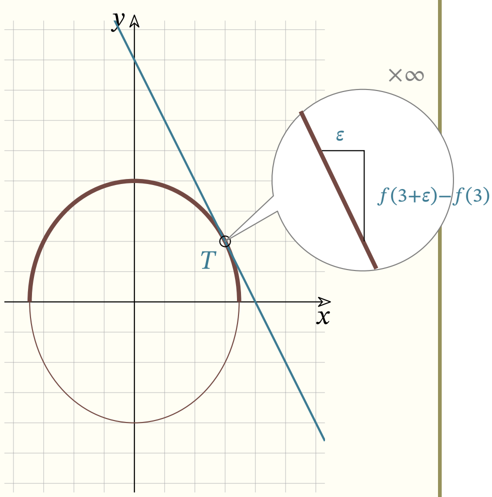
$$= \operatorname{st}\left(\frac{0{,}25\left(4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2\right) - 4 - 2\varepsilon + 6 - 3}{\varepsilon}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{1 + \varepsilon + 0{,}25\varepsilon^2 - 4 - 2\varepsilon + 6 - 3}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \operatorname{st}\left(\frac{-\varepsilon + 0{,}25\varepsilon^2}{\varepsilon}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{\cancel{\varepsilon}\,(-1 + 0{,}25\varepsilon)}{\cancel{\varepsilon}}\right) = \operatorname{st}\,(-1 + 0{,}25\varepsilon) = -1$$

4. sostituiamo il valore trovato nell'equazione del fascio di rette:

$$y = m\,(x - x_0) + y_0 \;\Rightarrow\; y = -\,(x - 2) + 3 \;\Rightarrow\; y = -x + 2 + 3 \;\Rightarrow\; y = -x + 5$$

Esempio 5.29:
Calcola la tangente all'ellisse di equazione: $4x^2 + 3y^2 = 48$ *nel punto di coordinate* $T(3;\ 2)$.
La funzione che descrive la parte di ellisse contenente T *è:* $y = +\sqrt{-\frac{4}{3}x^2 + 16}$
L'equazione del fascio di rette per T *è:*
$y = m(x-3) + 2$



$$m = \mathrm{st}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{f(3+\varepsilon) - f(3)}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \mathrm{st}\left(\frac{\sqrt{-\frac{4}{3}(3+\varepsilon)^2 + 16} - 2}{\varepsilon}\right) =$$

$$m = \mathrm{st}\left(\frac{\sqrt{-\frac{4}{3}(3+\varepsilon)^2 + 16} - 2}{\varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{-\frac{4}{3}(3+\varepsilon)^2 + 16} + 2}{\sqrt{-\frac{4}{3}(3+\varepsilon)^2 + 16} + 2}\right) =$$

$$= \mathrm{st}\left(\frac{-\frac{4}{3}\left(9 + 6\varepsilon + \varepsilon^2\right) + 16 - 4}{\varepsilon\left(\sqrt{-\frac{4}{3}\left(9 + 6\varepsilon + \varepsilon^2\right) + 16} + 2\right)}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{-8\varepsilon - \frac{4}{3}\varepsilon^2}{4\varepsilon}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{-8\cancel{\varepsilon}}{4\cancel{\varepsilon}}\right) = -2$$

E la tangente è quindi:

$$y = m(x - x_0) + y_0 \;\Rightarrow\; y = -2(x-3) + 2 \;\Rightarrow\; y = -2x + 8.$$

5.4 Esercizi

Esercizi dei singoli paragrafi

5.1 Dai numeri naturali ai numeri complessi

5.1. *Dimostra, con un ragionamento analogo a quello fatto per $\sqrt{2}$, che $\sqrt{3}$ non è razionale.*

5.2. *Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso.*
Esempio: $\sqrt{3}$: $A = \{1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205\}$, $B = \{2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321; 1,73206\}$

a) $\sqrt{5}$: $A = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$, $B = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$
b) $\frac{6}{7}$: $A = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$, $B = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$
c) $\frac{1}{7}$: $A = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$, $B = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$

5.3. *Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di almeno sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso:*

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

5.4. *Determina per ciascuno dei seguenti numeri irrazionali i numeri interi tra i quali è compreso. Esempio:* $5 < \sqrt{30} < 6$

a) $\sqrt{50}$
b) $\sqrt{47}$
c) $\sqrt{91}$
d) $\sqrt{73}$
e) $\sqrt{107}$
f) $\sqrt{119}$
g) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$
h) $2\sqrt{7}$
i) $2+\sqrt{7}$
j) $\sqrt{20}-\sqrt{10}$
k) $\sqrt{\frac{7}{10}}$
l) $7+\sqrt{\frac{1}{2}}$

5.5. *Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali:*

a) $\sqrt{2}$, 1, $\frac{2}{3}$, $2,0\overline{13}$, $\sqrt{5}$, $\frac{3}{2}$, 0,75
b) π, $\sqrt{3}$, $\frac{11}{5}$, $0,\overline{9}$, $\sqrt{10}$, $3,1\overline{4}$, $\sqrt[3]{25}$

5.6. *Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, suddividilo nei seguenti sottoinsiemi: l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, l'insieme $\mathbb{J}$ dei numeri irrazionali. Disponi in maniera opportuna i seguenti numeri:* $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, π, $0,\overline{3}$, 3,14, $\frac{3}{2}$, -2

5.7. *Indica il valore di verità delle seguenti affermazioni:*

a) *un numero decimale finito è sempre un numero razionale;*
b) *un numero decimale illimitato è sempre un numero irrazionale;*
c) *un numero decimale periodico è un numero irrazionale;*
d) *la somma algebrica di due numeri razionali è sempre un numero razionale;*
e) *la somma algebrica di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale;*
f) *il prodotto di due numeri razionali è sempre un numero razionale;*
g) *il prodotto di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale.*

5.2 I numeri iperreali *ℝ

Di seguito sono riportate alcune domande, scrivi sul quaderno una risposta e poi confrontala con quella riportata sotto.

Domande [1]

5.8. Enunciare l'assioma di Eudosso-Archimede per i segmenti e discutere in quale senso esso esclude l'esistenza di segmenti infinitesimi e infiniti.

Assioma di Eudosso-Archimede: Dati due segmenti diversi, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore o, equivalentemente, esiste sempre un sottomultiplo del maggiore che è più piccolo del minore. L'assioma nega l'esistenza di segmenti infiniti poiché afferma che, fissato un segmento arbitrario come unità di misura, ogni segmento, per quanto grande, risulta superato da un opportuno multiplo finito dell'unità di misura. Equivalentemente, esso nega l'esistenza di segmenti infinitesimi in quanto afferma che ogni segmento, per quanto piccolo, risulta maggiore di un opportuno sottomultiplo finito dell'unità di misura.

5.9. Cosa intendiamo per numeri standard e per segmenti standard?

I numeri standard sono i numeri reali $\mathbb{R}$ *e i segmenti standard sono i segmenti la cui misura può essere espressa mediante un numero reale positivo.*

5.10. Che cos'è un segmento infinitesimo?

Un segmento infinitesimo è un segmento minore di ogni segmento standard. Nessun segmento standard è quindi infinitesimo.

5.11. Che cos'è un segmento infinito?

Un segmento infinito è un segmento maggiore di ogni segmento standard. Nessun segmento standard è quindi infinito.

5.12. Che cos'è un segmento finito?

Un segmento finito è un segmento non infinito e quindi un segmento minore di almeno un segmento standard. Tutti i segmenti standard sono quindi segmenti finiti.

5.13. Che cos'è un segmento non infinitesimo?

Un segmento non infinitesimo è un segmento maggiore di almeno un segmento standard. Tutti i segmenti standard sono quindi non infinitesimi.

5.14. Che cos'è un segmento finito non infinitesimo?

Un segmento finito non infinitesimo è un segmento compreso tra due segmenti standard. Tutti i segmenti standard sono quindi finiti non infinitesimi.

5.15. Che cos'è un numero infinitesimo?

Un numero infinitesimo è un numero in valore assoluto minore di ogni numero standard positivo. L'unico numero standard infinitesimo è lo zero.

5.16. Che cos'è un numero infinito?

Un numero infinito è un numero in valore assoluto maggiore di ogni numero standard. Nessun numero standard è quindi infinito.

[1] Queste domande e le rispettive risposte sono state messe a disposizione dal prof. Giorgio Goldoni

5.17. Che cos'è un numero finito?

Un numero finito è un numero non infinito e quindi un numero in valore assoluto minore di almeno un numero standard. Tutti i numeri standard sono quindi numeri finiti.

5.18. Che cos'è un numero non infinitesimo?

Un numero non infinitesimo è un numero in valore assoluto maggiore di almeno un numero standard positivo. Tutti i numeri standard tranne lo zero sono quindi non infinitesimi.

5.19. Che cos'è un numero finito non infinitesimo?

Un numero finito non infinitesimo è un numero in valore assoluto compreso tra due numeri standard positivi. Tutti i numeri standard tranne lo zero sono quindi finiti non infinitesimi.

5.20. Cosa sono i numeri iperreali?

Negando l'Assioma di Eudosso/Archimede, accettiamo l'esistenza di segmenti maggiori di ogni multiplo dell'unità di misura e minori di ogni suo sottomultiplo e accettiamo quindi l'esistenza di segmenti infiniti e infinitesimi. Analogamente, accettiamo l'esistenza di numeri infiniti e infinitesimi. I numeri che si ottengono combinando i numeri standard con i numeri infiniti e infinitesimi mediante le operazioni aritmetiche sono chiamati numeri iperreali e il loro insieme si indica con $^*\mathbb{R}$.

5.21. Che cos'è la retta iperreale?

La retta iperreale è una retta i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con i numeri iperreali.

5.22. Come vengono classificati in tipi i numeri iperreali?

I numeri iperreali si dividono in finiti *(f) e* infiniti *(I). I finiti a loro volta si dividono in* finiti non infinitesimi *(fni) e in* infinitesimi *(i) e questi ultimi in* infinitesimi non nulli *(inn) e lo* zero. *Si distinguono quindi quattro tipi di iperreali:*

- *infiniti,*
- *finiti non infinitesimi,*
- *infinitesimi non nulli,*
- *zero.*

5.23. Come si comportano i tipi di numeri iperreali con le operazioni aritmetiche?

Addizione/sottrazione:	*Moltiplicazione:*	*Reciproco:*	*Divisione:*
$inn \mp inn = i$	$inn \times inn = inn$	$\dfrac{1}{inn} = I$	$inn : fni = inn$
$inn \mp fni = fni$	$inn \times fni = inn$	$\dfrac{1}{fni} = fni$	$inn : I = inn$
$inn \mp I = I$	$fni \times fni = fni$	$\dfrac{1}{I} = inn$	$fni : inn = I$
$fni \mp fni = f$	$fni \times I = I$		$fni : fni = fni$
$fni \mp I = I$	$I \times I = I$		$fni : I = inn$
			$I : inn = I$
			$I : fni = I$

5.24. Che cosa si intende per *forme indeterminate*?

Si chiamano forme indeterminate *le operazioni per le quali la sola conoscenza dei tipi degli operandi non consente di determinare il tipo del risultato. Le forme indeterminate relative alle operazioni aritmetiche sono:* $I \mp I$; $inn \times I$; $inn : inn$; $I : I$.

5.25. Quando due numeri si dicono *infinitamente vicini*?

Due numeri si dicono infinitamente vicini *se la loro differenza è un infinitesimo. Indichiamo il fatto che* x *è infinitamente vicino a* y *con* $x \approx y$. *Un numero* x *è infinitesimo se e solo se* $x \approx 0$.

5.26. Di quali proprietà gode la relazione $x \approx x$?

La relazione $x \approx x$ è riflessiva, simmetrica e transitiva ed è dunque una relazione di equivalenza. In simboli:

- $x \approx x$;
- $x \approx y \Rightarrow y \approx x$;
- $x \approx y \wedge y \approx z \Rightarrow x \approx z$

Inoltre, se due numeri sono infinitamente vicini allora sono dello stesso tipo.

5.27. Che cos'è una monade e che cosa si intende per monade principale?

La monade di un numero è l'insieme di tutti i numeri infinitamente vicini ad esso ed è quindi una classe di equivalenza della relazione $x \approx y$. Ne segue che due monadi sono sempre disgiunte o coincidenti e che le monadi formano una partizione dei numeri iperreali. In particolare la monade di un numero standard x consiste, oltre che del numero stesso, di tutti i numeri non standard ad esso infinitamente vicini, cioè dei numeri del tipo $x + \varepsilon$. La monade principale è la monade dello zero, che è costituita esattamente da tutti gli infinitesimi. Indichiamo la monade di x con $mon(x)$.

5.28. Quando due numeri si dicono a *distanza finita*?

Due numeri si dicono a distanza finita *quando la loro differenza è un numero finito. Per indicare che x è a distanza finita da y scriviamo $x \overset{f}{\approx} y$.*

5.29. Di quali proprietà gode la relazione $x \overset{f}{\approx} y$?

La relazione gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva ed è quindi una relazione di equivalenza. In simboli:

- $x \overset{f}{\approx} x$;
- $x \overset{f}{\approx} y \Rightarrow y \overset{f}{\approx} x$;
- $x \overset{f}{\approx} y \wedge y \overset{f}{\approx} z \Rightarrow x \overset{f}{\approx} z$

Se un numero è a distanza finita da un finito è finito, se è a distanza finita da un infinito è un infinito.

5.30. Che cos'è una *galassia* e che cosa si intende per galassia principale?

Due numeri si dicono appartenere a una stessa galassia *se sono a distanza finita tra loro. Una galassia è dunque una classe di equivalenza rispetto alla relazione di essere a distanza finita. In particolare, tutti i numeri standard appartengono a una stessa galassia, detta galassia principale. Indichiamo la galassia del numero x con $Gal(x)$.*

5.31. Come si confrontano due infinitesimi non nulli?

Per confrontare due infinitesimi non nulli ε e δ si considera il loro quoziente $\frac{\varepsilon}{\delta}$.

Se è:

infinitesimo *diciamo che ε è un infinitesimo di ordine superiore a δ o che δ è un infinitesimo di ordine inferiore a ε e scriviamo $\varepsilon = o(\delta)$.*

finito non infinitesimo *diciamo che ε e δ sono infinitesimi dello stesso ordine e scriviamo $\varepsilon = O(\delta)$ o $\delta = O(\varepsilon)$.*

infinito *allora diciamo ε è un infinitesimo di ordine inferiore a δ o che δ è un infinitesimo di ordine superiore a ε e scriviamo $\delta = o(\varepsilon)$.*

5.32. Come si confrontano due infiniti?

Dati due infiniti M e N si considera il loro quoziente $\frac{M}{N}$.

Se è:

infinito *diciamo che M è un infinito di ordine superiore a N o che N è un infinito di ordine inferiore a M e scriviamo $M \gg N$ o $N \ll M$.*

finito non infinitesimo *diciamo che M e N sono infiniti dello stesso ordine e scriviamo* $M = O(N)$ *o* $N = O(M)$.

infinitesimo *diciamo M è un infinito di ordine inferiore a N o che N è un infinito di ordine superiore a M e scriviamo* $M \ll N$ *o* $N \gg M$.

5.33. Che cos'è la parte standard di un numero finito?

Ogni numero finito risulta infinitamente vicino a un numero standard, detto appunto sua parte standard. In altre parole, ogni numero finito x *può essere scritto in modo unico nella forma* $x = s + \varepsilon$, *dove s è standard e* ε *è un infinitesimo eventualmente nullo. La parte standard di* x *si indica con* $\operatorname{st}(x)$.

5.34. Elencare le proprietà salienti della parte standard.

Indicando con a e b due numeri finiti (eventualmente infinitesimi o nulli):

$\operatorname{st}(a) = a \iff a$ *è standard*

$\operatorname{st}(a) = 0 \iff a$ *è infinitesimo*

$\operatorname{st}(a \pm b) = \operatorname{st}(a) \pm \operatorname{st}(b)$

$\operatorname{st}(ab) = \operatorname{st}(a)\operatorname{st}(b)$

$\operatorname{st}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\operatorname{st}(a)}{\operatorname{st}(b)}$

$\operatorname{st}(a) > 0 \Rightarrow a > 0$

$a > 0 \Rightarrow \operatorname{st}(a) \geq 0$

5.35. Quando due numeri non nulli si dicono indistinguibili?

Due numeri non nulli si dicono indistinguibili se il loro rapporto è infinitamente vicino all'unità o, equivalentemente, se la loro differenza è infinitesima rispetto a ciascuno di essi. Indichiamo il fatto che x *è indistinguibile da* y *con* $x \sim y$. *In simboli* $x \sim y$ *se e solo se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:*

- $\dfrac{x}{y} \approx 1$
- $\operatorname{st}\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1$
- $\dfrac{x-y}{x} \approx 0$
- $\dfrac{x-y}{y} \approx 0$

5.36. Di quali proprietà gode la relazione $x \sim y$?

Si tratta di una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva e quindi di una relazione di equivalenza sugli iperreali non nulli. In simboli:

- $x \sim x$
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Inoltre, se due numeri sono indistinguibili allora sono dello stesso tipo, cioè entrambi infinitesimi, finiti non infinitesimi o infiniti.

5.37. Quando sostituiamo il simbolo $\sim$ con quello di uguaglianza?

Quando siamo portati a identificare due numeri indistinguibili e, in questo caso, sostituiamo un numero con uno da esso indistinguibile e il più possibile semplice.

5.38. Che cosa si intende per microscopio standard?

Per microscopio standard si intende uno strumento ottico ideale che, puntato su un numero, consente di vedere una porzione di retta ingrandita di un fattore n. Il microscopio standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard.

5.39. Che cosa si intende per telescopio standard?

Per telescopio standard si intende uno strumento ottico ideale in grado di mostrare una parte remota di retta nella stessa scala della parte vicina. Il telescopio standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard.

5.40. Che cosa si intende per zoom standard?

Per zoom standard si intende uno strumento ottico ideale che, puntato nell'origine consente di vedere una parte di retta centrata nell'origine e in una scala rimpicciolita di un fattore n. Lo zoom standard può esser utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard in cui sia visibile lo zero.

5.41. Che cosa si intende per microscopio non-standard?

Per microscopio non-standard si intende uno strumento ottico ideale che, puntato su un numero, consente di vedere un'opportuna porzione di numeri infinitamente vicini a quel numero. Il microscopio non-standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard.

5.42. Che cosa si intende per telescopio non-standard?

Per telescopio standard si intende uno strumento ottico ideale in grado di mostrare una parte di retta a distanza infinita nella stessa scala della parte vicina. Il telescopio non-standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard.

5.43. Che cosa si intende per zoom non-standard?

Per zoom non-standard si intende uno strumento ottico ideale che, puntato nell'origine consente di vedere una parte di retta centrata nell'origine e in una scala rimpicciolita in modo tale da far entrare nel campo visivo numeri infiniti. Lo zoom non-standard può essere utilizzato per esplorare il campo visivo di ogni altro strumento ottico standard o non standard in cui sia visibile lo zero.

5.44. Cosa intendiamo per scala naturale di ingrandimento?

Una scala di rappresentazione della retta in cui il punto di coordinata 1 sia visibile e ben distinguibile dallo zero.

5.45. Come possiamo visualizzare un numero infinitesimo non nullo sulla retta iperreale?

Un numero infinitesimo non nullo può essere visualizzato come un numero che nella scala naturale risulta non separato dallo zero e che non può essere separato dallo zero con nessun microscopio standard. Occorre invece un microscopio non-standard per separarlo dallo zero.

5.46. Come possiamo visualizzare un numero infinito sulla retta iperreale?

Un numero infinito può essere visualizzato come un numero che nella scala naturale risulta esterno al campo visivo e che non può essere fatto entrare nel campo visivo di nessuno zoom standard. Occorre invece uno zoom non-standard per farlo entrare nel campo visivo.

5.47. Come possiamo visualizzare un numero finito non infinitesimo sulla retta iperreali?

Un numero finito non infinitesimo può essere visualizzato come un numero che già nella scala naturale rientra nel campo visivo e ben separato dallo zero; oppure come un numero che nella scala naturale risulta non separato dallo zero, ma che è separabile con un microscopio standard; infine, come un numero che nella scala naturale non rientra nel campo visivo, ma che possiamo far rientrare nel campo visivo di uno zoom standard.

5.48. Come possiamo visualizzare il fatto che ε è un infinitesimo di ordine superiore a δ?

Nella scala naturale i due numeri risultano non separati dallo zero e non è possibile separarli con nessun microscopio standard. Usando un microscopio non-standard riusciamo a separare dallo zero in numero δ, mentre il numero ε risulta non separato dallo zero e non si riesce a separarlo con nessun microscopio standard. In altri termini, nella scala in cui δ risulta visibile e separato dallo zero, ε risulta infinitesimo.

5.49. Come possiamo visualizzare il fatto che ε e δ sono due infinitesimo dello stesso ordine?

Nella scala naturale i due numeri risultano non separati dallo zero e non è possibile separarli con nessun microscopio standard. Usando un microscopio non-standard riusciamo a separare dallo zero entrambi i numeri; oppure riusciamo a separane solo uno, mentre l'altro risulta ancora non separato dallo zero, ma basta un microscopio standard per separare anche il secondo.

5.50. Come possiamo visualizzare il fatto che M è un infinito di ordine superiore a N?

Nella scala naturale i due numeri risultano esterni al campo visivo e non è possibile farli rientrare nel campo visivo di nessuno zoom standard. Usando uno zoom non standard possiamo far rientrare nel campo visivo in numero N, mentre il numero M continua a rimanere esterno al campo visivo e non si riesce a far rientrare con nessuno zoom standard. In altri termini, nella scala in cui N risulta visibile e separato dallo zero, M risulta infinito.

5.51. Come possiamo visualizzare il fatto che M e N sono due infiniti dello stesso ordine?

Nella scala naturale i due numeri risultano esterni al campo visivo e non è possibile farli entrare nel campo visivo di nessuno zoom standard. Usando uno zoom non-standard riusciamo a far rientrare nel campo visivo e separati dallo zero entrambi i numeri; oppure riusciamo a farne entrare solo uno, separato dallo zero, mentre l'altro risulta ancora esterno al campo visivo, ma basta uno zoom standard per far rientrare anche il anche il secondo.

5.2 Operazioni e tipo del risultato

Nei problemi di questa sezione si assuma che: ε, δ … siano *inn* postivi, $H, K, \ldots$ siano *I* postivi.

5.52. *Determina se le seguenti espressioni sono equivalenti a un numero* inn, fni, I.

a) $7{,}3 \cdot 10^{23} \cdot \varepsilon$

b) $8 + \dfrac{1}{\varepsilon}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$

d) $\dfrac{H}{9^{9^9}}$

e) $\dfrac{5\varepsilon^3 - 4\varepsilon^4}{7\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon}$

f) $(3+\varepsilon)(3-\varepsilon) - 6$

g) $\dfrac{4\varepsilon - 5\varepsilon^2}{2\varepsilon^2 - 3\varepsilon^3}$

h) $\dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon}$

i) $\dfrac{4}{5\varepsilon} \cdot \dfrac{2\varepsilon}{6}$

j) $\dfrac{H+K}{HK}$

k) $H^2 - H$

l) $\dfrac{5H^4 - 4H + 7}{7H^3 - 4}$

m) $\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{4+\varepsilon} - \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

n) $7\varepsilon + 5\delta$

o) $3\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 - \varepsilon + 4$

p) $(5-\varepsilon)^2 - 25$

q) $\dfrac{5\varepsilon^3 + 7\varepsilon^4}{2\varepsilon^3 + 3\varepsilon^4}$

r) $\dfrac{\sqrt{\varepsilon} - 4\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon} + 3}$

s) $\dfrac{H - 7 + \varepsilon}{H^2 + 3\varepsilon}$

5.3 Espressioni con gli iperreali

5.53. *Esegui i seguenti calcoli nell'insieme degli *ℝ sapendo che x è un infinitesimo non nullo.*

a) $\operatorname{st}(9-3x)$
b) $\operatorname{st}(5+2x-x^2)$
c) $\operatorname{st}(7+2x^3)$
d) $\operatorname{st}(2+8x+x^2)$
e) $\operatorname{st}\left(\frac{2-5x}{6+7x}\right)$
f) $\operatorname{st}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}\right)$
g) $\operatorname{st}\left(\frac{x^4-x^2+4x}{3x^2-2x-3}\right)$
h) $\operatorname{st}\left(\frac{x^4-x^3+x^2}{2x^2}\right)$
i) $\operatorname{st}\left(\frac{4x^4-3x^3+2x^2}{3x^4-2x^3+x^2}\right)$
j) $\operatorname{st}\left((2+x)(3-x^2)\right)$

5.54. *Esegui i seguenti calcoli nell'insieme degli *ℝ sapendo che x è un infinito positivo.*

a) $\operatorname{st}(9-3x)$
b) $\operatorname{st}(5+2x-x^2)$
c) $\operatorname{st}\left(\frac{2x+4}{3x-6}\right)$
d) $\operatorname{st}\left(\frac{6x-7}{x^2+2}\right)$
e) $\operatorname{st}\left(\frac{3x^2-5x+2}{x^2+1}\right)$
f) $\operatorname{st}\left(\frac{x^4+3x^2+1}{4x^4+2x^2-1}\right)$
g) $\operatorname{st}\left(\frac{x^4-x^2+4x}{-3x^2-2x-3}\right)$
h) $\operatorname{st}\left(\frac{x^4-x^3+x^2}{2x^2}\right)$
i) $\operatorname{st}\left(\frac{-4x^4-3x^3+2x^2}{3x^4-2x^3+x^2}\right)$
j) $\operatorname{st}\left((2+x)(3-x^2)\right)$
k) $\operatorname{st}\left(\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{x^2-5}\right)$

5.3 Pendenza e tangenti

5.55. *Calcola l'equazione della tangente ad una parabola in un punto di ascissa data.*

a) $y=-\frac{1}{2}x^2-4x+5;\quad x_T=3$ [$y=-7x+\frac{19}{2}$]
b) $y=-2x^2+3x-2;\quad x_T=-4$ [$y=19x+30$]
c) $y=-x^2+5x+5;\quad x_T=5$ [$y=-5x+30$]
d) $y=\frac{1}{2}x^2-x-6;\quad x_T=-4$ [$y=-5x-14$]
e) $y=-x^2+5x-3;\quad x_T=-1$ [$y=7x-2$]
f) $y=x^2-2x-1;\quad x_T=4$ [$y=6x-17$]
g) $y=x^2-5x+1;\quad x_T=1$ [$y=-3x$]
h) $y=-x^2-3x;\quad x_T=4$ [$y=-11x+16$]
i) $y=x^2-3x+3;\quad x_T=-2$ [$y=-7x-1$]
j) $y=-\frac{1}{2}x^2-2x-4;\quad x_T=-4$ [$y=2x+4$]
k) $y=-2x^2-4;\quad x_T=2$ [$y=-8x+4$]
l) $y=2x^2-6;\quad x_T=0$ [$y=-6$]
m) $y=-2x^2-5x+2;\quad x_T=0$ [$y=-5x+2$]
n) $y=-x^2+3x+4;\quad x_T=-6$ [$y=15x+40$]
o) $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-5;\quad x_T=5$ [$y=-2x+\frac{15}{2}$]
p) $y=-x^2+2x+5;\quad x_T=-1$ [$y=4x+6$]
q) $y=-2x^2-3x+2;\quad x_T=-3$ [$y=9x+20$]
r) $y=x^2-5x;\quad x_T=-4$ [$y=-13x-16$]
s) $y=-x^2-x-5;\quad x_T=-6$ [$y=11x+31$]

t) $y = 2x^2 + 2x;\quad x_T = -4$ $[y = -14x - 32]$
u) $y = -x^2 - 5x;\quad x_T = -5$ $[y = 5x + 25]$
v) $y = -2x^2 + 2;\quad x_T = 3$ $[y = -12x + 20]$

Indice analitico